А.Д.АЛЕКСАНДРОВ А.Л.ВЕРНЕР В.И.РЫЖИК

9

# ГЕОМЕТРИЯ

• Просвещение •

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
А46

*Условные обозначения*

19.26 3 — в первой клеточке — номер параграфа и номер задачи, во второй — номер пункта (или пунктов) этого параграфа, к которому задача относится

19.28 6 — **черным цветом** номера задач для учащихся основной школы

●...● — текст для учащихся основной школы

■ — окончание доказательства утверждения

[*] — более трудный материал

На первом форзаце изображен памятник Петру I в С.-Петербурге;

на втором форзаце изображены решетка Летнего сада в С.-Петербурге, средневековый дворец Альгамбра в Испании, различные множества Мандельброта — фракталы.

**Александров А. Д.**
А46 Геометрия : Учеб. пособие для 9 кл. с углубл. изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик.— М. : Просвещение, 2004.— 240 с. : ил.— ISBN 5-09-011551-6.

**УДК 373.167.1:514**
**ББК 22.151я72**

**ISBN 5-09-011551-6**

# Введение

Важнейшие теоремы, доказанные в курсе 8 класса (кроме теоремы синусов), были известны еще в Древней Греции. И доказывали мы их традиционными методами элементарной геометрии, созданными тоже в Древней Греции, но не утратившими и сейчас своего значения. В курсе 9 класса мы начнем рассказывать о других методах геометрии, созданных значительно позднее, в XVII—XX вв.,— координатном, векторном и методе геометрических преобразований. Эти разделы геометрии нашли широкое применение в технике и естественных науках, прежде всего в физике. Основное содержание глав учебника — планиметрическое, а о соответствующем стереометрическом материале мы рассказываем в дополнениях к главам.

Глава IV

# Векторы и координаты

## § 18. Векторы

### 18.1. Понятие вектора

Известные вам величины могут быть двух видов. Есть величины, которые вполне определяются своими численными значениями (при данных единицах измерения): например, длина, площадь, масса. Такие величины называются **скалярными величинами** или, короче, **скалярами**.

Но есть и такие величины, которые задаются не только своими численными значениями, но и направлениями: например, скорость, сила.

Так, часто недостаточно знать, что скорость автомобиля равна 50 км/ч, надо еще знать, в каком направлении едет этот автомобиль.

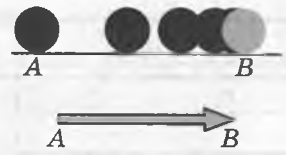
**Величины, которые характеризуются не только численным значением, но и направлением, называются векторными величинами или, короче, векторами.**

Численное значение вектора называется его **модулем**.

Для обозначения векторов употребляются стрелки: $\vec{a}$, $\vec{v}$. Эти обозначения читаются так: «вектор $a$»; «вектор $v$». Для модулей векторов употребляется тот же знак, что и для модулей чисел: $|\vec{a}|$, $|\vec{v}|$.

### 18.2. Направленные отрезки

Простейший пример векторной величины представляет перемещение. Перемещение характеризуется расстоянием и направлением. Если тело переместилось из точки $A$ в точку $B$, то это перемещение естественно изобразить отрезком, направленным из точки $A$ в точку $B$ (рис. 1).




Так появляется **направленный отрезок**. У направленного отрезка указан порядок концов: первый конец считается «началом», второй — «концом». Рисуют направленные отрезки всегда со стрелкой на конце. Обозначают направленный отрезок с началом $A$ и концом $B$ так: $\overrightarrow{AB}$.

Итак, вектор — перемещение из точки $A$ в точку $B$ — мы изобразили направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$. Направленными отрезками изображают и другие векторы: например, в физике силу, скорость (рис. 2).

Векторами называют и сами направленные отрезки. Это не совсем точно: предмет и его изображение не одно и то же. Но в обыденной речи, показывая, например, слона на фотографии, говорят: «Это слон» — и никто не говорит: «Это изображение слона». Так и в геометрии с векторами: рисуя направленный отрезок, говорят, что «это вектор», хотя это только изображение вектора.

Если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ изображает вектор $\vec{a}$, то пишем $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и про направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ говорим: «Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен вектору $\vec{a}$». Модуль вектора $\vec{a}$ — это длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, или, что то же самое, длина отрезка $AB$. Поэтому в геометрии модуль вектора называется также **длиной вектора**.

О направленных отрезках мы будем говорить, как и об обычных отрезках, что они лежат на прямой, или взаимно перпендикулярны, или перпендикулярны некоторой прямой, или

Рис. 2

Рис. 3

параллельны друг другу, или параллельны некоторой прямой и т. п.

Мы говорим, что «вектор лежит на прямой», если изображающий его направленный отрезок лежит на этой прямой.

Два вектора называют **коллинеарными**, если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой (рис. 3). Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Говорят, что **векторы взаимно перпендикулярны**, если изображающие их направленные отрезки взаимно перпендикулярны. Перпендикулярность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Наконец, мы говорим, что вектор $\vec{v}$ перпендикулярен (параллелен) прямой $a$, если изображающий его направленный отрезок перпендикулярен (параллелен) прямой $a$, и пишем: $\vec{v} \perp a$ ($\vec{v} \parallel a$).

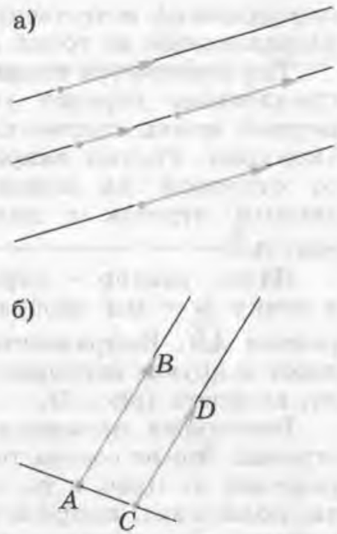



Рис. 4

## 18.3. Сонаправленные отрезки и векторы

Когда говорят, что корабли или самолеты идут в одном направлении, то имеют в виду, что они следуют друг за другом или идут параллельными курсами. Так и о векторах говорят, что они **одинаково направлены** или, короче, **сонаправлены**, если они коллинеарны и направлены в одну сторону (рис. 4, *а*). При этом мы считаем, что коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, если лучи $AB$ и $CD$ лежат по одну сторону от некоторой непараллельной им прямой, т. е. в одной полуплоскости, ограниченной этой прямой (рис. 4, *б*).

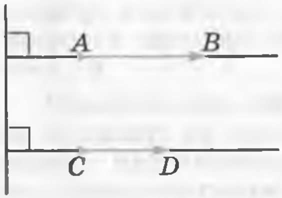



Рис. 5

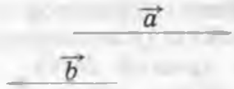



Рис. 6

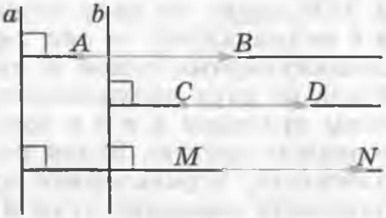



Рис. 7

Ясно, что эту прямую можно выбрать перпендикулярной лучам $AB$ и $CD$ (рис. 5). И справедлив **первый признак сонаправленности векторов**: векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, если найдется такая прямая $a$, что, во-первых, они перпендикулярны этой прямой и, во-вторых, лучи $AB$ и $CD$ лежат по одну сторону от этой прямой.

Действительно, поскольку $\overrightarrow{AB} \perp a$ и $\overrightarrow{CD} \perp a$, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны (так как прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны одной прямой). А второе условие и означает сонаправленность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. ■

Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, но не сонаправлены, то говорят, что они **направлены противоположно** и пишут $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$ (рис. 6) или $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Следующая теорема тоже является признаком сонаправленности.

**Теорема 23** *(второй признак сонаправленности векторов).*

---

**Два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены.**

---

**Доказательство.** Пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены с вектором $\overrightarrow{MN}$ (рис. 7). Докажем, что $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. Так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$, то найдется такая перпендикулярная им прямая $a$, от которой лучи $AB$ и $MN$ лежат по одну сторону. Точно так же для векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$ найдется перпендикулярная им прямая $b$, от которой лучи $CD$

и $MN$ лежат по одну сторону. Если прямые $a$ и $b$ не совпадают, то они параллельны (как перпендикулярные одной и той же прямой $MN$). Тогда из двух полуплоскостей, которые ограничены прямыми $a$ и $b$ и содержат луч $MN$, одна содержит другую. Будем считать, что это полуплоскость, ограниченная прямой $a$. Эта полуплоскость содержит лучи $AB$, $CD$, $MN$. Тем самым выполнено второе условие первого признака сонаправленности. Кроме того, выполнено и первое условие, так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярны прямой $a$. Поэтому $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. ■

О сонаправленных векторах говорят, что у них *одно и то же направление*.

## 18.4. Равенство векторов

Векторы называются **равными**, если их длины равны и они сонаправлены (рис. 8, *а*).

Обратите внимание, что векторы, имеющие равные длины, но разные направления, не равны (рис. 8, *б*).

Для равенства векторных величин выполняются следующие основные свойства равенства величин:

1. *Каждый вектор равен самому себе.*

2. *Если вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$, то $\vec{b}$ равен $\vec{a}$.*

3. *Два вектора, равные третьему вектору, равны.*

Первые два свойства вытекают, очевидно, из определения равенства векторов. Докажем третье свойство (его считают первым признаком равенства векторов).

Пусть $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{c} = \vec{b}$. Тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а также $|\vec{c}| = |\vec{b}|$ и $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Из равенства модулей

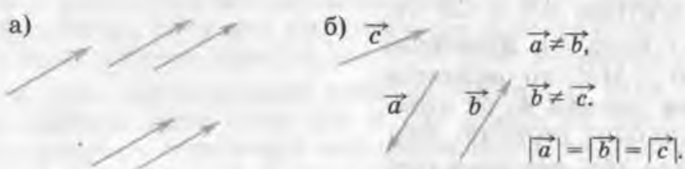



Рис. 8

следует, что $|\vec{a}|=|\vec{c}|$. А из теоремы 23 о сонаправленности векторов вытекает, что $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$. Поэтому $\vec{a}=\vec{c}$. ■

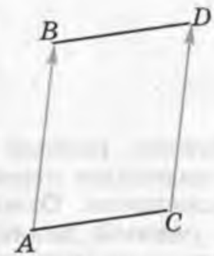


Рис. 9

Представлять себе равные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, не лежащие на одной прямой, удобно как одинаково направленные противоположные стороны параллелограмма $ABDC$ (рис. 9). (Объясните, почему $ABDC$ — параллелограмм.)

Обратное утверждение является **вторым признаком равенства векторов**: *если четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, то* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Действительно, $AB=CD$ и $AB \parallel CD$. Кроме того, лучи $AB$ и $CD$ лежат по одну сторону от прямой $AC$. Поэтому $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены. Значит, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. ■

Обе пары противоположных сторон параллелограмма рассматриваются еще в одном, уже **третьем, признаке равенства векторов**. Этот признак справедлив и для векторов, лежащих на одной прямой. Сформулируем его в виде следующей теоремы:

**Теорема 24.**

---

**Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$** (рис. 10).

---

**Доказательство.** Пусть даны равные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Если они не лежат на одной прямой, то согласно доказанному $ABDC$ — параллелограмм (рис. 10, *а*). И по второму признаку равенства векторов $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Пусть теперь $AB$ и $CD$ лежат на одной прямой (рис. 10, *б*). Введем на этой прямой координату $x$, и пусть числа $x_A$, $x_B$, $x_C$, $x_D$ — координаты точек $A$, $B$, $C$, $D$. Тогда условие $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ для этих координат означает, что выполнено равенство

$$x_B - x_A = x_D - x_C \qquad (1)$$

(равенство модулей чисел $x_B - x_A$ и $x_D - x_C$ означает, что $AB=CD$, а совпадение их знаков — что $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$). Но из (1) следует

$$x_C - x_A = x_D - x_B, \qquad (2)$$

а это и означает, что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. ■

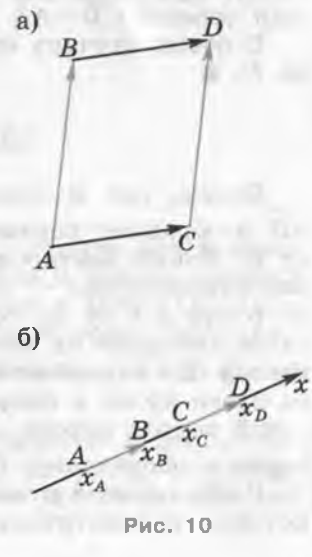


Рис. 10

## 18.5. Откладывание вектора, равного данному

Вектор, равный данному, можно изобразить направленным отрезком с началом в любой точке плоскости. Отложить от данной точки вектор, равный данному,— значит построить направленный отрезок с началом в этой точке, изображающий данный вектор. На рисунке 11 от точки $A$ отложен вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$.

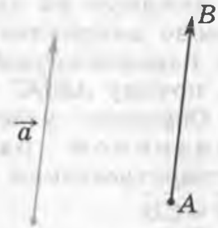



Рис. 11

**Теорема 25** *(об откладывании вектора).*

---

**От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.**

---

**Доказательство.** Пусть даны вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и точка $C$, от которой надо отложить вектор, равный $\vec{a}$. Возможны два случая:

1. Точка $C$ не лежит на прямой $AB$ (общий случай).

2. Точка $C$ лежит на прямой $AB$ (частный случай).

В первом случае построим параллелограмм $ABDC$ (рис. 12, *а*). Получим вектор $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.

Во втором случае на прямой $AB$ от точки $C$ в нужном направлении откладываем направленный отрезок $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ (рис. 12, *б*).

В обоих случаях строится единственная точка $D$. ■

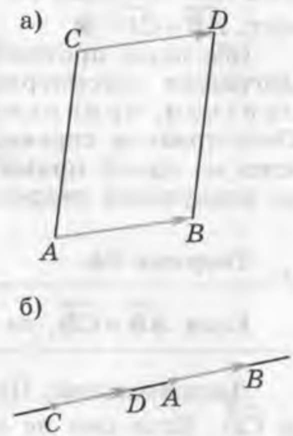



Рис. 12

## 18.6. Нулевой вектор

Будем, как и прежде, говорить, что вектор $\overrightarrow{AB}$ изображает перемещение из точки $A$ в точку $B$. Каким вектором изобразить частный случай перемещения — покой, т. е. «перемещение» из точки $A$ в ту же точку $A$? Чтобы изобразить такое «стояние на месте», надо ввести **нулевой вектор.** По определению модуль нулевого вектора равен нулю, а направления он не имеет. Нулевой вектор короче называют также **нуль-вектором** и обозначают: $\vec{0}$.

Изображается нулевой вектор любой точкой, которая рассматривается как начало и конец этого вектора. Считается, что нуль-вектор параллелен и перпендикулярен любой прямой (любому вектору).

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ окажется нуль-вектором, то его начало $A$ и конец $B$ — это одна и та же точка.

Доказанные теоремы 24 и 25 верны и для нуль-вектора.

После того как появился нуль-вектор, уже нельзя сказать, что каждый вектор изображается направленным отрезком (каждый, кроме нулевого). Подчеркнем, что сонаправленность определена только для ненулевых векторов и теорема 23 о сонаправленных векторах верна лишь для ненулевых векторов.

В дальнейшем при доказательствах теорем случай нуль-вектора обычно будет оговариваться особо.

## Вопросы

1. В чем отличие векторной величины от скалярной?
2. Приведите примеры скалярных и векторных величин.
3. Какие вы знаете признаки сонаправленных векторов?
4. Какие вы знаете признаки равенства векторов?
5. Что вы знаете о нуль-векторе?
6. Можно ли утверждать, что два вектора, коллинеарные третьему вектору, коллинеарны?

## Задачи к § 18

### Смотрим

**18.1** Пусть $ABCD$ — параллелограмм и точка $O$ — точка пересечения его диагоналей. Рассмотрим векторы, начала и концы которых лежат в вершинах параллелограмма, а также в точке $O$. а) Какие векторы лежат на прямой $BD$? б) Какие векторы параллельны прямой $AD$? в) Какие векторы коллинеарны $\overrightarrow{AB}$? г) Какой вектор равен $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CO}$?

**18.2** Пусть $ABCD$ — прямоугольник. Рассматриваются векторы, заданные его сторонами. Укажите на этом рисунке: а) коллинеарные векторы; б) перпендикулярные векторы; в) равные векторы.

Доказываем

18.3 Нарисуйте прямую $p$ и вектор $\vec{a}$, не параллельный прямой $p$. а) От двух разных точек $A_1$ и $A_2$ прямой $p$ отложите два вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$, равные $\vec{a}$. Объясните, почему прямые $A_1B_1$ и $A_2B_2$ образуют с $p$ равные углы. Почему $\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{A_1A_2}$? б) Отложите от двух точек $A_1$ и $A_2$ векторы $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_2C_2}$, сонаправленные с вектором $\vec{a}$. Почему прямые $A_1C_1$ и $A_2C_2$ образуют с $p$ равные углы? в) Верно ли это утверждение, если $\overrightarrow{A_1C_1}\uparrow\uparrow\vec{a}$, то $\overrightarrow{A_2C_2}\uparrow\downarrow\vec{a}$?

Строим

18.4 Отметьте две точки $A$ и $B$. Найдите такую точку $X$, что: а) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{XB}$; б) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}$; в) $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{XB}$.

Рассуждаем

18.5 Что следует из условий: а) $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$; б) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$; в) $\vec{a}\parallel p$ и $\vec{a}\perp p$, где $p$ — некоторая прямая; г) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$?

Выходим в пространство

18.6 Составьте и решите задачу, аналогичную задаче 18.1, для параллелепипеда.

18.7 Составьте и решите задачу, аналогичную задаче 18.2, для прямоугольного параллелепипеда.

# § 19. Сложение векторов

## 19.1. Правило треугольника. Определение сложения векторов

Если тело переместить из точки $A$ в точку $B$, а потом из точки $B$ в точку $C$, то его суммарное перемещение из $A$ в $C$ представляется вектором $\overrightarrow{AC}$ (рис. 13, *а*). Так складывают векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

В рассмотренном случае конец первого вектора $\overrightarrow{AB}$ является началом второго вектора $\overrightarrow{BC}$. В общем же случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ складывают-

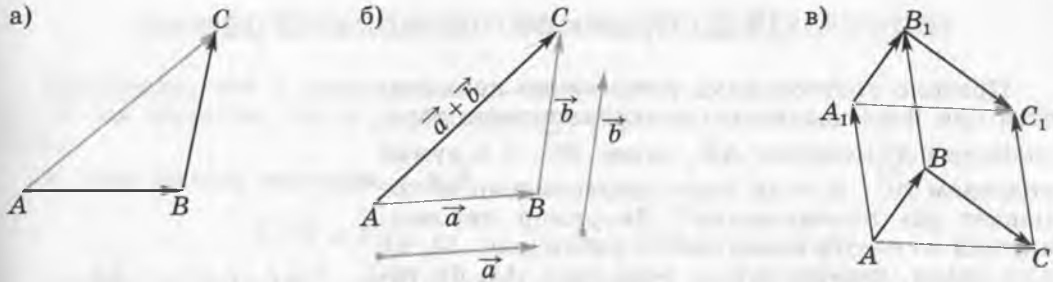



Рис. 13

ся так. Откладывают от какой-либо точки $A$ вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 13, *б*). Потом от точки $B$ откладывают вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ является **суммой векторов** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}. \qquad (2)$$

Это правило получения суммы двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **правилом треугольника** (потому что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ не лежат на одной прямой, то точки $A$, $B$, $C$ — вершины треугольника $ABC$).

Итак, можно сформулировать **определение:**

**Суммой двух векторов называется вектор, построенный по правилу треугольника.**

Сумму данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ мы строили, откладывая ее от данной точки. А что будет, если взять другую точку? Оказывается, что сумма получится равной прежней. А именно если отложить от точки $A_1$ тот же вектор $\vec{a}$, т. е. $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$, а затем от точки $B_1$ отложить вектор $\vec{b}$, т. е. $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$, то сумма $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{A_1C_1}$ будет равна вектору $\overrightarrow{AC}$, полученному в равенстве (2), т. е. $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 13, *в*).

Докажем это. Так как $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$, то по теореме 24 имеем $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$. Аналогично из равенства $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}$ следует равенство $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$. Поэтому $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1}$. Но из этого равенства (по той же теореме 24) следует, что $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$. ■

## 19.2. Правило параллелограмма

Правило треугольника естественно применяется при последовательных перемещениях тела: сначала перемещение $\overrightarrow{AB}$, затем $\overrightarrow{BC}$, а в сумме получаем $\overrightarrow{AC}$. А если тело одновременно испытывает два перемещения? Например, человек, идущий по палубе плывущего корабля (рис. 14, *а*), или лодка, пересекающая реку (рис. 14, *б*): перемещение лодки слагается из перемещений поперек реки и по течению реки.

Каждое из этих слагаемых перемещений (за один и тот же промежуток времени) изобразим вектором, отложенным от точки $A$, т. е. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (рис. 15). Рассматриваем лишь случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Тогда суммарное перемещение изобразится диагональю $\overrightarrow{AC}$ параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

Убедимся, что вектор $\overrightarrow{AC}$ будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, построенной по правилу треугольника. Действительно, так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Поэтому $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, т. е. $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$. ■

Мы доказали **правило параллелограмма:** *если векторы неколлинеарны, то их сумма представляется диагональю построенного на них параллелограмма.*

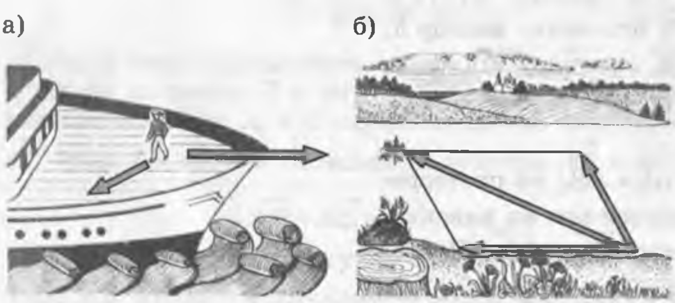



Рис. 14

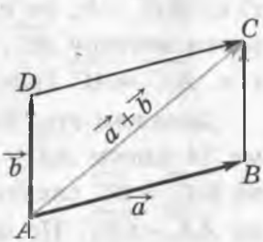



Рис. 15

## 19.3. Свойства сложения векторов

Интересно, что у операции сложения векторов те же свойства, что и у операции сложения чисел.

**1. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$**

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad (3)$$

(переместительный закон, или коммутативность сложения).

**Доказательство.** Возможны два случая:

1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Тогда отложим их от точки $A$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ — и построим на них параллелограмм $ABCD$ (рис. 15). Поскольку $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, то имеет место равенство (3).

2) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ лежат на одной прямой (рис. 16). На той же прямой лежат векторы $\overrightarrow{AB_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{a}$. Надо доказать, что точки $C$ и $C_1$ совпадают.

Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то это следует из сложения отрезков (рис. 16, *а*), а если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то — из вычитания отрезков (рис. 16, *б*). Подробное доказательство проведите самостоятельно. ■

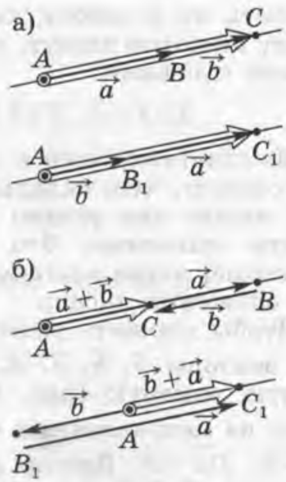



Рис. 16

**2. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$**

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad (4)$$

(сочетательный закон, или ассоциативность сложения).

**Доказательство.** Отложим от точки $A$ вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, затем от точки $B$ вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а потом от точки $C$ вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 17). Тогда

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

С другой стороны,

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

Итак, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. ■

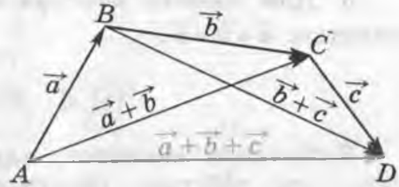



Рис. 17

Пользуясь этим законом для трех векторов, можно как угодно группировать слагаемые при любом их числе, т. е. за-

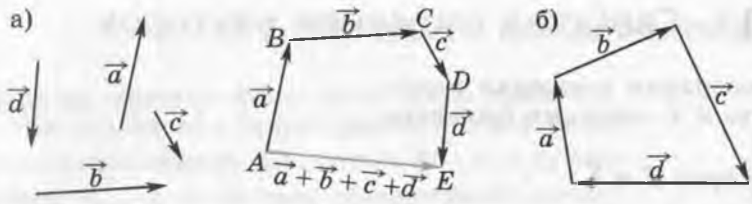



Рис. 18

ключать их в скобки любым образом. Поэтому сумму векторов пишут, никак не объединяя слагаемые скобками:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\ \text{и т. д.}$$

Из сочетательного и переместительного законов следует, что, складывая любое число векторов, можно как угодно переставлять и группировать слагаемые. Это значительно облегчает сложение, когда слагаемых больше двух (как и при сложении чисел).

Чтобы сложить несколько векторов, например векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, удобно построить векторную ломаную (рис. 18, *а*). Эта ломаная состоит из направленных отрезков $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{d}$. Вектор $\overrightarrow{AE}$, идущий из начала ломаной $ABCDE$ в ее конец, и является суммой:

$$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}.$$

Вообще при любом расположении точек $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ верно равенство $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$. Назовем его **правилом цепочки.** Если ломаная получилась замкнутой, то сумма векторов равна нуль-вектору (рис. 18, *б*).

Отметим еще одно очевидное свойство нуль-вектора:

**3. Для любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.**

## 19.4. Вычитание векторов

Вычитание векторов, как и вычитание чисел,— это действие, обратное сложению. Поэтому **разностью двух векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **называется** такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, т. е. $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Обозначается разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так же, как разность чисел:

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}.$$

Разность двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить так. Отложим от какой-либо точки $O$ данные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получим $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 19). Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ и будет разностью $\vec{a}-\vec{b}$, поскольку $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$. Поэтому можно написать:

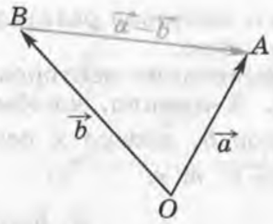


Рис. 19

$$\vec{c}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}. \qquad (5)$$

(Запомните, что стрелку разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от одной точки, рисуют у вектора $\vec{a}$!)

## 19.5. Противоположный вектор

Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если их длины равны и они направлены противоположно (рис. 20). Каждый из таких двух векторов называется противоположным другому.

*Нуль-вектор считается противоположным самому себе.*

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$ (и читается: «минус $\vec{a}$»).

*Если сложить противоположные векторы* (по правилу треугольника), *то в сумме получится нуль-вектор*, т. е.

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}. \qquad (6)$$

Действительно, пусть вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ изображает перемещение из точки $A$ в точку $B$ (рис. 20, *б*). Отложив от точки $B$ вектор $-\vec{a}$, мы должны переместиться по лучу $BA$ из точки $B$ на расстояние, равное $AB$, т. е. вернуться в точку $A$. Итак, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, то $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. ■

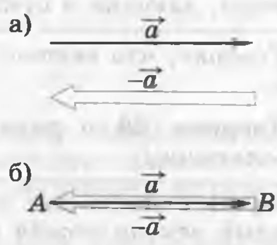


Рис. 20

Верно и обратное утверждение: *если сумма двух векторов равна нуль-вектору, то они противоположны.* Действительно, в этом случае длины векторов равны и они направлены противоположно.

Вычитание векторов можно свести к сложению. А именно, *чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$, т. е.*

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}). \qquad (7)$$

Действительно, пусть как и в равенстве (5), $\vec{c}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$ (см. рис. 19). По правилу треугольника $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$. Кроме того, $\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB}=-\vec{b}$. Поэтому $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\vec{a}+(-\vec{b})$, что и утверждает равенство (7). ■

Мы можем теперь переносить вектор из одной части равенства в другую, изменяя его знак, т. е. заменяя его на противоположный вектор: из равенства $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$ следует, что $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

## 19.6. Разложение вектора на составляющие

Самолет взлетел, его перемещение слагается из двух составляющих: по горизонтали и по вертикали (рис. 21). Допустим, сместившись по горизонтали на 100 км, он набрал высоту 10 км. Горизонтальная составляющая его перемещения равна 100 км, вертикальная — 10 км. Это составляющие вектора перемещения самолета. Сам вектор перемещения является их суммой.

**Определение.**

**Составляющими данного вектора называются векторы, дающие в сумме этот вектор.**

Говорят, что *вектор разложен на составляющие.*

**Теорема 26** *(о разложении вектора на составляющие).*

**Пусть заданы две пересекающиеся прямые. Каждый вектор можно разложить на составляющие, лежащие на этих прямых.**

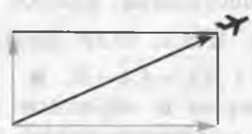


Рис. 21

**Доказательство.** Пусть даны две прямые $a$ и $b$, пересекающиеся в точке $O$, и вектор $\vec{v}$. Отложим вектор $\vec{v}$ от точки $O$. Получим $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ (рис. 22, *а*). В общем случае вектор $\overrightarrow{OV}$ не лежит ни на одной из данных прямых. Тогда проведем через точку $V$ параллельные им прямые. Вместе с прямыми $a$ и $b$ они ограничат параллелограмм $OAVB$ с диагональю $OV$. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и есть составляющие вектора $\vec{v}$, лежащие на прямых $a$ и $b$. (В дальнейшем говорим короче: составляющие по прямым $a$ и $b$.)

Если вектор $\overrightarrow{OV}$ лежит на одной из прямых $a$ или $b$, то его составляющая по этой прямой — это он сам. А по другой прямой его составляющая равна нуль-вектору. ■

Особенно важный случай представляет разложение на составляющие по взаимно перпендикулярным прямым. Тогда параллелограмм с диагональю $OV$ — это прямоугольник, а его стороны — это проекции отрезка $OV$ на прямые $a$ и $b$ (рис. 22, *б*).

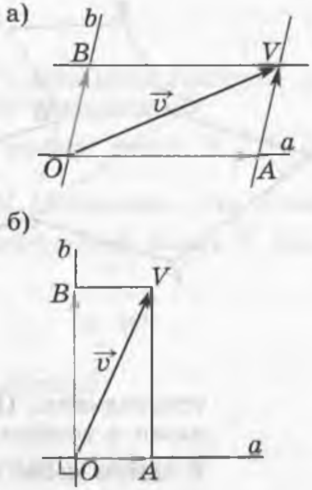


Рис. 22

## Вопросы

1. В каком случае складывают векторы по правилу треугольника? А в каком — по правилу параллелограмма?
2. Какие вы знаете свойства сложения векторов?
3. Какой вектор называется разностью двух векторов?
4. Какие два вектора называются противоположными?
5. Какими способами можно получить разность двух векторов?
6. Как разложить вектор по двум пересекающимся прямым?

## Задачи к § 19

### Разбираемся в решении

**19.1** **3** На сторонах треугольника $ABC$ построены параллелограммы $AKLB$, $BMNC$, $CPQA$ (порядок обхода вершин этих параллелограммов один и тот же). Можно ли составить треугольник из отрезков: а) $LM$, $NP$, $QK$; б) $LP$, $MQ$, $NK$?

**Решение.** Из трех отрезков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда сумма любых двух из них больше третьего.

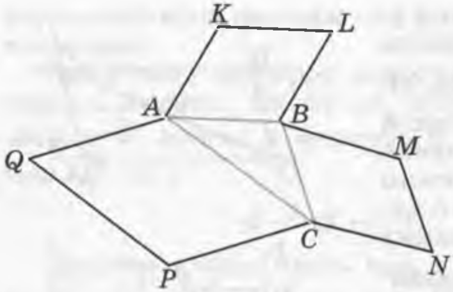


Рис. 23

Можно ограничиться тем условием, что наибольший из них меньше суммы двух других (?).

В этой задаче параллелограммы произвольны, могут даже не лежать в одной плоскости (все три), а потому неясно, как сравнивать длины этих отрезков.

Переформулируем эту задачу на векторном языке. Прежде всего заметим, что для любого треугольника $ABC$ справедливо равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. Верно и обратное: если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в сумме дают $\vec{0}$, то из них можно составить треугольник. (При этом необходимо, чтобы все они были ненулевыми и вообще чтобы среди этих векторов не было параллельных.) В самом деле, отложим от любой точки $A$ вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, затем от точки $B$ отложим вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Тогда если мы отложим от точки $C$ вектор $\vec{c}$, то и получим вектор $\overrightarrow{CA}$ (?).

Чтобы ответить на вопрос задачи а), докажем сначала, что

$$\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QK}=\vec{0}.$$

Имеем

$$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BL},\ \overrightarrow{NP}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CN},\ \overrightarrow{QK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AQ}\ \ (?).$$

Поэтому

$$\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AQ}\ \ \text{(рис. 23)}.$$

Но $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{CP}$ (?), и поэтому исходная сумма векторов равна $\vec{0}$.

Что еще осталось выяснить для ответа на вопрос задачи?

Как и в чисто геометрических задачах, возможны другие решения.

Рассмотрим, например, сумму векторов

$$\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QK}.$$

Подумайте сами, что можно получить из этого рассмотрения. (Заметьте, что решение совершенно не зависит от расположения параллелограммов.)

А как можно обобщить эту задачу?

И наконец, обратите внимание на характерную для векторных методов особенность: решение задачи не зависит от того, лежат эти параллелограммы на одной и той же плоскости или нет. И решение задачи, и ответ на поставленный вопрос не изменяются. Правда, при этом понадобятся некоторые свойства векторов в пространстве. Какие?

## Дополняем теорию

**19.2** **1** Докажите, что $|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|$. При каком положении векторов достигается равенство? Обобщите полученные результаты.

**19.3** **4** Докажите, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}$ при любом выборе точки $X$.

**19.4** **6** Пусть сумма нескольких векторов равна $\vec{0}$. Докажите, что сумма всех составляющих этих векторов по любой прямой равна $\vec{0}$. Проверьте обратное.

## Рисуем

**19.5** **1** Нарисуйте треугольник $ABC$. Нарисуйте векторы:

а) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$.

**19.6** **1** Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Нарисуйте векторы:

а) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

**19.7** **2** Вернитесь к задаче 19.5. Выполните сложение указанных векторов по правилу параллелограмма.

**19.8** **2** Вернитесь к задаче 19.6. Выполните сложение указанных векторов по правилу параллелограмма.

**19.9** **3** Нарисуйте четырехугольник $ABCD$. Нарисуйте векторы:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$;

г) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$; е) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$;

ж) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$.

**19.10** **4** Нарисуйте треугольник $ABC$. Нарисуйте векторы:

а) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CB}$;

г) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}$.

**19.11** **4** Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Нарисуйте векторы:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$;

г) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

**19.12** **4** Нарисуйте три любых вектора. Обозначьте их $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Нарисуйте вектор $\vec{x}$, такой, что:

а) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{x}$; б) $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}+\vec{x}$; в) $\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}-\vec{x}$.

**19.13** **4** Отметьте любые три точки $A$, $B$, $C$. Нарисуйте точку $X$, такую, что:

а) $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}$; б) $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XC}$.

**19.14** **5** Вернитесь к задаче 19.10. Выполните вычитание, используя противоположные векторы.

**19.15** **5** Вернитесь к задаче 19.11. Выполните вычитание, используя противоположные векторы.

**19.16** 5 Нарисуйте иллюстрации к таким векторным равенствам:

а) $-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$; б) $-(\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}+\vec{b}$;

в) $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}=(\vec{c}-\vec{b})+\vec{a}$.

**19.17** 6 Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Пусть точка $K$ — середина стороны $BC$, точка $M$ — середина стороны $CD$.

а) Нарисуйте составляющие по прямым $AB$ и $AD$ векторов: 1) $\overrightarrow{AK}$; 2) $\overrightarrow{AM}$; 3) $\overrightarrow{DK}$; 4) $\overrightarrow{BM}$; 5) $\overrightarrow{KM}$.

б) Нарисуйте составляющие по прямым $AK$ и $AM$ векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{DB}$; 3) $\overrightarrow{BM}$.

**19.18** 6 Нарисуйте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общим началом.

а) Пусть $\vec{b}$ является составляющей вектора $\vec{a}$. Нарисуйте вторую его составляющую $\vec{c}$.

б) Пусть теперь $\vec{a}$ является составляющей вектора $\vec{b}$. Нарисуйте вторую его составляющую $\vec{d}$. Какое взаимное положение занимают векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$?

### Находим величину

**19.19** 1 Вернитесь к задаче 19.5. Чему равна длина такой суммы в равностороннем треугольнике со стороной 1?

**19.20** 1 Дан ромб $ABCD$ со стороной 1 и углом $A$, равным 30°. Чему равна длина суммы векторов: а) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$?

**19.21** 3 Из одной точки выходят три единичных вектора, как показано на рисунке 24. Нарисуйте сумму этих векторов и вычислите ее длину.

**19.22** 4 Вернитесь к задаче 19.10. Чему равна длина такой разности в равностороннем треугольнике со стороной 1? Вычислите длины этих разностей в равнобедренном прямоугольном треугольнике с единичными катетами $AC$ и $BC$.

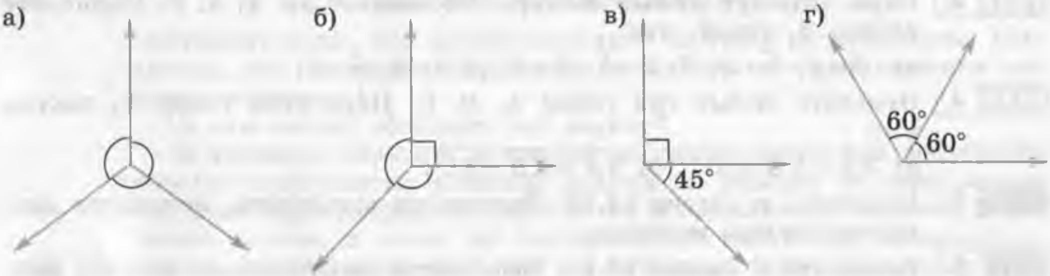



Рис. 24

## Доказываем

**19.23** **1** Докажите, что при любом положении точек $A$, $B$, $C$, $D$ верно равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

**19.24** **4** Докажите, что: а) $|\vec{a}-\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$; б) $|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|$. Когда достигаются равенства?

**19.25** **4** Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что для любой точки $O$ верно равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. Верно ли обратное? Будут ли верны эти утверждения, если точка $O$ не лежит в плоскости параллелограмма?

## Исследуем

**19.26** **3** Существует ли пятиугольник: а) стороны которого равны и параллельны диагоналям произвольно заданного пятиугольника; б) диагонали которого равны и параллельны сторонам произвольно заданного пятиугольника? Как обобщить полученные результаты?

**19.27** **6** Нарисуйте систему координат.

а) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$ и его составляющие по осям $x$ и $y$.

б) Какое положение на плоскости должен занимать вектор $\overrightarrow{OA}$, чтобы его горизонтальная составляющая была длиннее вертикальной?

в) А при каком положении вектора $\overrightarrow{OA}$ его составляющие по осям будут равной длины?

**19.28** **6** а) Может ли длина одной из двух составляющих вектора быть больше длины самого вектора?

б) Может ли длина обеих составляющих вектора быть больше длины его самого?

в) Пусть длина одной из двух составляющих вектора равна длине самого вектора. В каких границах лежит длина другой его составляющей?

**19.29** **6** Можно ли вектор длиной 10 разложить на две составляющие длиной 1? А на две составляющие длиной 100? Можно ли вектор заданной длины разложить на две составляющие также заданной длины?

## Применяем геометрию

**19.30** **1** Самолет пролетел 200 км на юго-запад, а затем 300 км на запад. Сделайте соответствующий рисунок, используя векторы. На каком расстоянии он оказался от начальной точки? Составьте похожие задачи.

**19.31** **2** Вертолет летел на север со скоростью $v_1$. Вдруг поднялся западный ветер и начал дуть со скоростью $v_2$. Сделайте рисунок. а) При

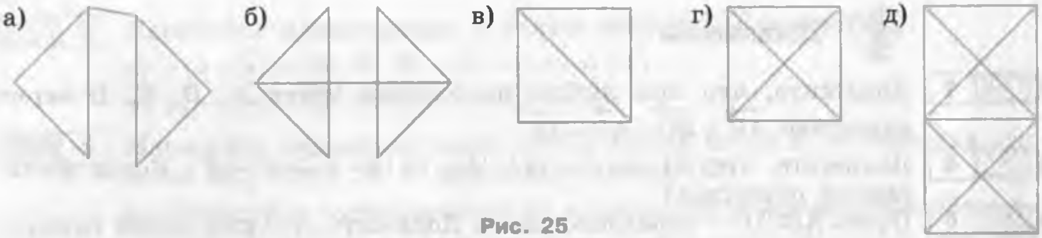


Рис. 25

каком соотношении между скоростями $v_1$ и $v_2$ вертолет будет лететь на северо-восток? б) Как вычислить угол, на который он отклонится? в) С какой скоростью полетит вертолет теперь, выдерживая по компасу прежний курс?

**19.32** **2** С одного берега реки на другой поплыл человек, выдерживая направление прямо на противоположный берег. Известны скорость пловца, скорость течения реки и ширина реки. Как узнать, на сколько его отнесет течением от первоначально намеченной точки, когда он окажется на том берегу? Как узнать, какое расстояние он проплыл?

**19.33** **2** На берегах одной реки напротив друг друга стоят две деревни. Из первой во вторую отправился катер. Известны скорость катера в стоячей воде, скорость течения реки и ширина реки. Требуется узнать: а) под каким углом должна быть направлена скорость катера относительно берега; б) какова его скорость в этой реке; в) какой путь проделает катер. Как это сделать?

**19.34** **3** Две равные по величине силы взаимно перпендикулярны. Третья сила по величине в два раза больше каждой из двух и образует с ними равные тупые углы. Нарисуйте равнодействующую силу. Сравните ее с величиной третьей силы.

**19.35** **3** Корабль держит курс (по компасу) на восток со скоростью $v_1$. Дует северный ветер со скоростью $v_2$, а течение сносит корабль на юго-запад со скоростью $v_3$, причем $v_1 = v_2 = 10v_3$. Каков истинный курс корабля?

### Занимательная геометрия

**19.36** **3** Перед вами на рисунке 25 фигуры, составленные из отрезков. Можно ли на этих отрезках расставить векторы так, чтобы в сумме получился $\vec{0}$? (На каждом из отрезков задается только один вектор.)

**19.37** **3** Дайте векторное истолкование ситуации, описанной в басне И. А. Крылова про лебедя, рака и щуку.

### Выходим в пространство

**19.38** **4** Пусть $ABCD$ — тетраэдр. Докажите, что $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. Можно ли обобщить эту задачу?

### Участвуем в олимпиаде

**19.39** Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}|+|\vec{b}|<1$. Докажите, что длина каждого из этих векторов меньше 1.

**19.40** а) Из центра правильного 25-угольника проведены векторы во все его вершины. Как надо выбрать несколько векторов из этих 25, чтобы их сумма имела наибольшую длину?

б) На плоскости дано $2n$ векторов, идущих из центра правильного $2n$-угольника в его вершины. Сколько из них нужно взять, чтобы их сумма имела максимальную длину?

**19.41** Точка $O$ лежит на прямой $a$; $\overrightarrow{OP}_1$, $\overrightarrow{OP}_2$, ..., $\overrightarrow{OP}_n$ — единичные векторы, такие, что точки $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ лежат в одной плоскости, содержащей $a$, и все по одну сторону от $a$. Докажите, что если $n$ нечетное, то $|\overrightarrow{OP}_1+\overrightarrow{OP}_2+...+\overrightarrow{OP}_n|\geqslant 1$.

# § 20. Умножение вектора на число

## 20.1. Определение умножения вектора на число

Определив сложение любых векторов, мы можем теперь рассмотреть суммы вида $\vec{a}+\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ и т. д. Такие суммы, как и в алгебре, естественно обозначить $2\vec{a}$, $3\vec{a}$ и т. д. (рис. 26). Уже этот простейший пример показывает, что удобно ввести операцию умножения вектора на число, и подсказывает, как дать соответствующее определение.

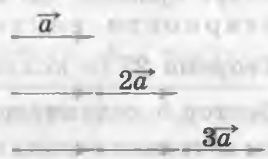


Рис. 26

**Определение.**

**Произведением вектора $\vec{a}\neq\vec{0}$ и числа $x\neq 0$ называется такой вектор $x\vec{a}$, для которого выполняются два условия:**

1) его длина равна произведению длины вектора $\vec{a}$ и модуля числа $x$, т. е.

$$|x\vec{a}|=|x||\vec{a}|; \qquad (1)$$

2) он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $x>0$, и направлен противоположно вектору $\vec{a}$, если $x<0$ (рис. 27).

Если же $\vec{a}=\vec{0}$ или $x=0$, то вектор $x\vec{a}$ нулевой (что согласуется с (1)).

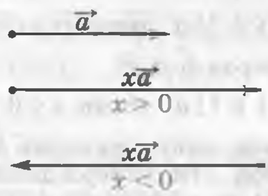


Рис. 27

Из данного определения непосредственно вытекают такие следствия:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ *для любого вектора* $\vec{a}$.

2. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ *для любого вектора* $\vec{a}$.

3. *Если* $x\vec{a} = \vec{0}$, *то* $x = 0$ *или* $\vec{a} = \vec{0}$.

4. *Если* $x\vec{a} = x\vec{b}$ *и* $x \neq 0$, *то* $\vec{a} = \vec{b}$.

5. *Если* $x\vec{a} = y\vec{a}$ *и* $\vec{a} \neq \vec{0}$, *то* $x = y$.

Докажем, например, последнее утверждение. Из равенства $x\vec{a} = y\vec{a}$ по формуле (1) получаем, что $|x||\vec{a}| = |y||\vec{a}|$. Так как $|\vec{a}| \neq 0$, то $|x| = |y|$. Кроме того, числа $x$ и $y$ имеют один знак (в противном случае векторы $x\vec{a}$ и $y\vec{a}$ были бы направлены противоположно). Поэтому $x = y$. ■

## 20.2. Характерное свойство коллинеарных векторов

Из определения умножения вектора на число вытекает простой, но важный **признак коллинеарности векторов**.

**Теорема 27** *(о коллинеарных векторах).*

---

**Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда $\vec{b} = x\vec{a}$.**

---

**Доказательство.** 1) Если $\vec{b} = x\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (по определению действия умножения вектора на число).

2) Докажем теперь обратное утверждение: если $\vec{b} \parallel \vec{a}$, то найдется такое число $x$, что $\vec{b} = x\vec{a}$. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то $x = 0$. Если же $\vec{b} \neq \vec{0}$, то возможны два случая:

а) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, тогда $x > 0$ и равен отношению длин векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$.

б) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, тогда $x < 0$ и его модуль равен отношению длин векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$.

Оба эти утверждения вытекают непосредственно из определения операции умножения вектора на число. Убедитесь в этом сами. ■

**Следствие** *(о векторах на прямой).*

**Два вектора, отложенные от одной и той же точки, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.**


Рис. 28

Другими словами, точка $X$ лежит на прямой $AB$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = x\overrightarrow{AB}$ (рис. 28).

## Вопросы

1. Как умножить ненулевой вектор на число, не равное 0?
2. Какие вы знаете свойства умножения вектора на число?
3. Докажите самостоятельно свойства умножения векторов 1—4 (с. 26).
4. Какие вы знаете теперь характерные свойства коллинеарных векторов?

## Задачи к § 20

### Разбираемся в решении

**D.1** Даны три точки $A$, $B$, $C$. Найдите точку $X$, такую, что $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$.

**Решение.** Отметьте в тетради три любые точки и, проведя некоторое число экспериментов, попытайтесь предугадать результат.

Решить же эту задачу проще всего с использованием так называемой радиус-векторной техники. Эта техника состоит в том, что векторы, рассматриваемые в задаче, представляются как разности векторов, выходящих из одной и той же точки, т. е. радиус-векторов.

Выберем на плоскости любую точку $O$. Тогда

$$\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX},\ \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OX},\ \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OX}.$$

Из условия следует, что $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OX} = \vec{0}$. Отсюда получаем, что $3 \cdot \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (?). Поэтому $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Осталось сложить векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, затем эту сумму умножить на $\frac{1}{3}$ и полученный вектор отложить от точки $O$. Проделайте все это на бумаге, причем как можно аккуратнее.

Такое решение показывает нам, что искомая точка существует. Но единственна ли она? Точку $O$ вы выбирали произвольно. Так, может быть, при другом ее выборе вы получите другую точку $X$? Иначе говоря, нам надо показать, что положение искомой точки $X$ не зависит от выбора точки $O$. Для начала проверьте это на практике — возьмите другую точку $O$ и посмотрите, получилась ли та же точка $X$.

Пусть теперь точка $X_1$ такова, что $\overrightarrow{X_1A}+\overrightarrow{X_1B}+\overrightarrow{X_1C}=\vec{0}$.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{XX_1}$. Если $\overrightarrow{XX_1}=\vec{0}$, то $X=X_1$, а если $\overrightarrow{XX_1}\neq\vec{0}$, то $X\neq X_1$.

Для вектора $\overrightarrow{XX_1}$ запишем три похожих равенства:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XX_1}&=\overrightarrow{AX_1}-\overrightarrow{AX},\\ \overrightarrow{XX_1}&=\overrightarrow{BX_1}-\overrightarrow{BX},\\ \overrightarrow{XX_1}&=\overrightarrow{CX_1}-\overrightarrow{CX}.\end{aligned} \qquad (?)$$

Сложив их все, получим

$$3\overrightarrow{XX_1}=\overrightarrow{AX_1}-\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BX_1}-\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CX_1}-\overrightarrow{CX}=\vec{0} \ (?),$$

откуда и следует, что $\overrightarrow{XX_1}=\vec{0}$, т. е. $X_1=X$.

Искомую точку $X$ мы с самого начала могли бы получить проще, если бы точку $O$ выбрали в какой-либо из данных точек: $A$, $B$, $C$. Если бы мы выбрали ее в точке $A$, то получили бы равенство

$$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

Из него следует, что отрезок $AX$ — это треть диагонали параллелограмма, построенного на отрезках $AB$ и $AC$. Но треть этой диагонали есть $\frac{2}{3}$ от ее половины, т. е. $\frac{2}{3}$ от медианы треугольника $ABC$, проведенной к стороне $BC$. (Сделайте в тетради рисунок!)

Какое следствие вы отсюда можете получить?

Как можно обобщить эту задачу?

Кстати, а можно ли точку $O$ выбрать не в той плоскости, где лежат точки $A$, $B$, $C$? И что отсюда следует? И какие при этом нужны оговорки относительно расположения точек $A$, $B$, $C$?

**20.2** Пусть $\vec{a}=x\vec{b}$ и $x\neq 0$. Докажите, что $\vec{b}=\frac{1}{x}\vec{a}$.

### Дополняем теорию

**20.3** **Линейной комбинацией векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Числа $\alpha$ и $\beta$ называются **коэффициентами линейной комбинации**. а) Нарисуйте два любых неколлинеарных вектора $\vec{a}$

и $\vec{b}$. Выберите сами два любых числа и, считая их коэффициентами линейной комбинации, постройте саму линейную комбинацию. б) Объясните, почему векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{0}$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. в) Как расположена линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ относительно каждого из них, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

**20.4** Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — три вектора плоскости, среди которых нет коллинеарных. Докажите, что найдется такая пара $\alpha$ и $\beta$, что $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Докажите, что такая пара единственная.

### Рисуем

**20.5** Пусть $A$ и $B$ — две данные точки. Нарисуйте точку $X$, такую, что: а) $\overrightarrow{XA}=3\overrightarrow{XB}$; б) $\overrightarrow{BX}=-2\overrightarrow{AX}$; в) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{AB}$.

**20.6** Даны три точки $A$, $B$, $C$. Нарисуйте точку $X$, такую, что: а) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{BX}-\overrightarrow{XC}=\vec{0}$; б) $\overrightarrow{AX}+2\overrightarrow{BX}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CX}=\vec{0}$.

### Находим величину

**20.7** Выразите вектор $\vec{b}$ из равенства:
а) $\vec{a}=2\vec{b}$; б) $\vec{a}=-3\vec{b}$; в) $\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{b}$; г) $\vec{a}=-5{,}5\vec{b}$.

**20.8** На отрезке $PQ$ взята точка $X$, такая, что $PX:XQ=2:1$. Выразите: а) $\overrightarrow{PX}$ через $\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{QX}$ через $\overrightarrow{XP}$; в) $\overrightarrow{PQ}$ через $\overrightarrow{QX}$. Решите эту задачу в общем виде.

**20.9** Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть $Q$ — точка пересечения его диагоналей. Положим $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Выразите как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

### Исследуем

**20.10** Сравните длины векторов $\vec{a}$ и $x\vec{a}$ в зависимости от числа $x$.

**20.11** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Будут ли коллинеарны векторы: а) $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$; б) $-5\vec{a}$ и $0{,}5\vec{b}$; в) $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$; г) $3\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{a}$; д) $2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ и $\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$; е) $\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}$ и $\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}$?

**20.12** Какой вывод можно сделать о расположении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; б) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$; в) $|2\vec{a}-3\vec{b}|=2|\vec{a}|+3|\vec{b}|$? Обобщите эти наблюдения.

## Участвуем в олимпиаде

**20.13** На плоскости дано 1980 векторов, причем среди них есть неколлинеарные. Известно, что сумма любых 1979 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 1980 векторов равна нулевому вектору.

**20.14** Внутри треугольника $ABC$ выбрана произвольная точка $O$. Докажите, что справедливо равенство $S_A \cdot \overrightarrow{OA} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, где $S_A$, $S_B$, $S_C$ — площади треугольников $BCO$, $CAO$, $ABO$ соответственно.

**20.15** На плоскости расположены две окружности радиусов $r_1$ и $r_2$ с центрами $O_1$ и $O_2$ соответственно. На первой окружности взята точка $A_1$, а на второй — точка $A_2$ так, что векторы $\overrightarrow{O_1A_1}$ и $\overrightarrow{O_2A_2}$ коллинеарны и противоположно направлены. Какую линию опишет середина $A$ отрезка $A_1A_2$, если точка $A_1$ «обежит» первую окружность?

# § 21. Проекция вектора на ось

## 21.1. Угол между ненулевыми векторами

Угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется следующим образом. Их надо отложить от одной точки $O$ (рис. 29): $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, а затем найти величину угла между лучами $OA$ и $OB$. Ее и называют углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначают $\angle \vec{a}\vec{b}$.

Итак,

**Углом между двумя ненулевыми векторами** называется величина образуемого ими угла, когда они отложены от одной точки.

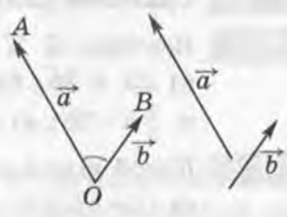


Рис. 29

Если векторы сонаправлены, то угол между ними считается равным 0°. Если векторы направлены противоположно, то угол между ними равен 180°.

*Угол между векторами не зависит от выбора той точки, от которой они откладываются.* Доказать это надо лишь для неколлинеарных векторов, так как для сонаправленных и противоположно направленных векторов это вытекает из данного определения.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два неколлинеарных вектора. Отложим их от точки $O$ (рис. 30), тогда $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, и от точки $O_1$, тогда $\overrightarrow{O_1A_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{O_1B_1}=\vec{b}$. Пусть прямые $OA$ и $O_1B_1$ пересекаются в некоторой точке $O_2$. Обозначим буквой $\alpha$ тот угол с вершиной в точке $O_2$, который будет соответственным с углом $AOB$ (при параллельных $OB$, $O_2B_1$ и секущей $OO_2$). По свойствам параллельных прямых $\alpha=\angle AOB$. Но тот же угол $\alpha$ будет соответственным и для угла $A_1O_1B_1$ (при параллельных прямых $A_1O_1$, $AO_2$ и секущей $O_1O_2$). Поэтому (по тому же свойству) $\alpha=\angle A_1O_1B_1$. Следовательно, $\angle A_1O_1B_1=\angle AOB$. ■

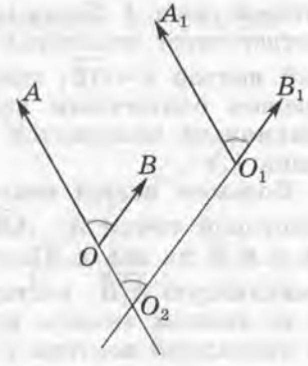


Рис. 30

## 21.2. Определение проекции вектора на ось

При рассмотрении векторной величины нас может интересовать не столько она сама, сколько ее составляющая в некотором направлении. Так, при взлете и посадке самолета особенно важна вертикальная составляющая его перемещения, а в остальное время полета важнее горизонтальная (см. рис. 21). Как сказано в § 19, такие составляющие находят проектированием вектора на взаимно перпендикулярные прямые (см. рис. 22, *б*). Только о таких составляющих мы теперь и говорим.

Если на прямой, на которую проектируется вектор, ввести координату, то составляющую вектора по этой прямой удобно задать числом. Это число называется проекцией вектора на ось. Дадим его определение.

Пусть задана **координатная ось** $x$ (рис. 31), т. е. прямая $l$, на которой выбраны точка $O$ — начало координат, направление и точка $E$, координата

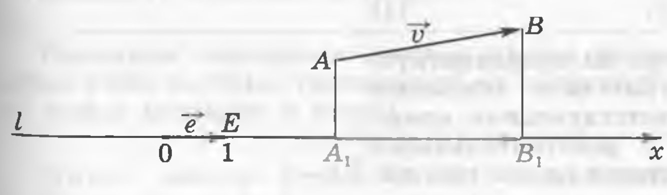


Рис. 31

которой равна 1. Тогда каждой точке $M$ прямой $l$ соответствует некоторая координата $x$. Единичный вектор $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$, сонаправленный с осью $x$, назовем единичным вектором оси $x$. (Вообще **единичным** называется вектор, длина которого равна 1.)

Возьмем любой вектор $\vec{v}$ и отложим его от некоторой точки $A$: $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$. Спроектируем точки $A$ и $B$ на ось $x$. Получим точки $A_1$, $B_1$ и составляющую $\overrightarrow{A_1B_1}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ по оси $x$. Ее длина со знаком «плюс» или «минус» и называется проекцией вектора $\vec{v}$ на ось $x$.

**Определение.**

---

**Проекцией $v_x$ вектора $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ на ось $x$** называется длина его составляющей $\overrightarrow{A_1B_1}$ по этой оси, взятая со знаком «плюс» или «минус». При этом берется знак «плюс», если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси $x$, и знак «минус», если эти направления противоположны. Если $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{0}$, т. е. $A_1=B_1$, то $v_x=0$.

---

Итак,

$$v_x=\begin{cases} +\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, & \text{если } \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow\vec{e};\\ -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, & \text{если } \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow\vec{e};\\ 0, & \text{если } \overrightarrow{A_1B_1}=\vec{0}, \text{ т. е. } A_1=B_1. \end{cases}$$

Обратите внимание, что проекция точки — точка, проекция отрезка — отрезок (или точка), а проекция вектора — число.

Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ получается из коллинеарного ему единичного вектора $\vec{e}$ умножением на $\pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$. При этом если $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow\vec{e}$, то $\overrightarrow{A_1B_1}=\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|\vec{e}$. Если же $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow\vec{e}$, то $\overrightarrow{A_1B_1}=-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|\vec{e}$.

Следовательно, имеет место равенство

$$\overrightarrow{A_1B_1}=v_x\vec{e}. \qquad (1)$$

Понятие проекции вектора на координатную ось позволит нам геометрические операции с векторами заменить соответствующими арифметическими операциями с действительными числами — проекциями векторов на оси координат.

## 21.3. Вычисление проекции вектора на ось

Мы укажем два способа вычисления проекции вектора.

1) **Вычисление проекции с помощью координат.** По определению проекция $v_x$ вектора $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ на ось $x$ равна длине его составляющей $\overrightarrow{A_1B_1}$ по этой оси, взятой со знаком «плюс» или «минус». Но длина ненулевого вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ — это длина отрезка $A_1B_1$, т. е. расстояние между точками $A_1$, $B_1$.

Как вам известно из курса математики 6 класса, это расстояние можно найти, зная координаты $x_A$, $x_B$ точек $A_1$ и $B_1$ по формуле

$$A_1B_1=|x_B-x_A|. \qquad (2)$$

Если $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow\vec{e}$, то $x_B>x_A$ (рис. 32, *а*) и $x_B-x_A>0$. В этом случае $|x_B-x_A|=x_B-x_A$ и $v_x=|\overrightarrow{A_1B_1}|=x_B-x_A$.

Если же $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow\vec{e}$, то $x_B<x_A$ (рис. 32, *б*) и $x_B-x_A<0$. В этом случае $|x_B-x_A|=-(x_B-x_A)$ и $v_x=-|\overrightarrow{A_1B_1}|=x_B-x_A$.

Если же $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{0}$, то $v_x=0$, $A_1=B_1$, $x_B=x_A$ и снова $v_x=x_B-x_A$ (рис. 32, *в*).

Итак, для всех случаев доказано важное равенство

$$v_x=x_B-x_A. \qquad (3)$$

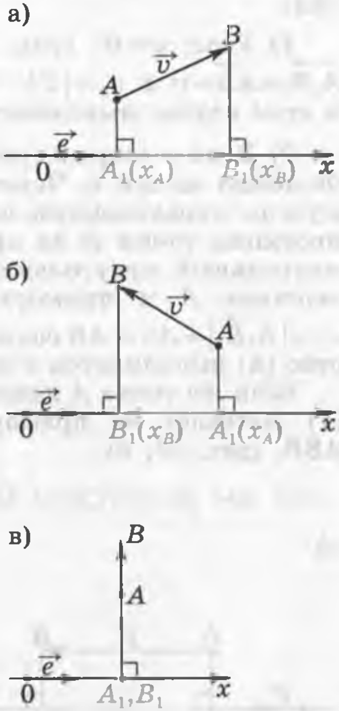


Рис. 32

2) **Вычисление проекции с помощью угла между вектором и осью. Углом между вектором и координатной осью** называется угол между вектором и единичным вектором этой оси.

Второй способ вычисления проекции вектора дает следующая лемма:

**Лемма** *(о проекции вектора).*

**Проекция ненулевого вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.**

Дано: вектор $\vec{v}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, $\vec{e}$ — единичный вектор координатной оси $x$, $\varphi=\angle\vec{v}\vec{e}$.

Доказать:

$$v_x = |\vec{v}| \cos\varphi. \qquad (4)$$

**Доказательство.** Возможны следующие случаи:

1) Угол $\varphi = 0°$ (рис. 33, *а*). Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{e}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$ и $v_x = |\vec{v}|$. Так как $\cos 0° = 1$, то (4) в этом случае выполняется.

2) Угол $\varphi$ острый (рис. 33, *б*). Пусть точка $A$ не лежит на оси $x$. Через точку $A$ проведем прямую $p$, параллельную оси $x$. Пусть точка $C$ — проекция точки $B$ на прямую $p$. Получим прямоугольный треугольник $ABC$ с углом $\varphi$ при вершине $A$ и прямоугольник $AA_1B_1C$. Тогда $v_x = |\overrightarrow{A_1B_1}| = AC = AB\cos\varphi = |\vec{v}|\cos\varphi$, т. е. равенство (4) выполняется в рассматриваемом случае.

Если же точка $A$ лежит на оси $x$, то равенство (4) вытекает из прямоугольного треугольника $ABB_1$ (рис. 33, *в*).

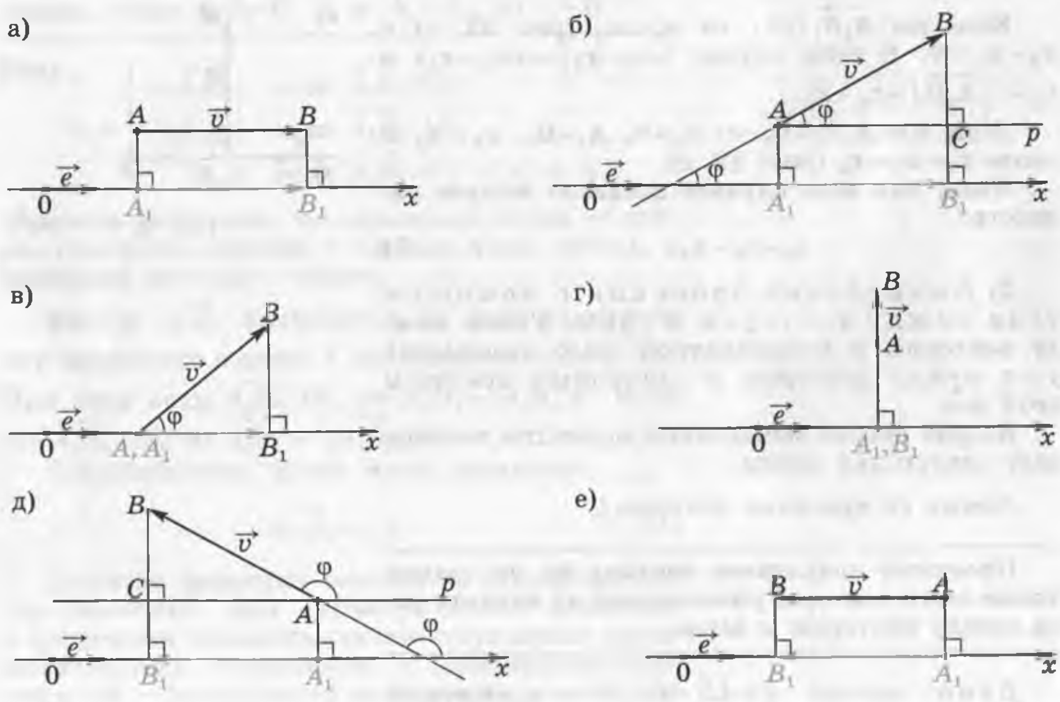



Рис. 33

3) Угол $\varphi=90°$. В этом случае $\overrightarrow{AB} \perp \vec{e}$, $A_1=B_1$ и $v_x=0$. И так как $\cos 90°=0$, то (4) и выполняется (рис. 33, *г*).

4) Угол $\varphi$ тупой. Снова через точку $A$ проводим прямую $p$, параллельную оси $x$, и проектируем на нее точку $B$ в точку $C$ (рис. 33, *д*). Снова получим прямоугольный треугольник $ABC$. Его угол при вершине $A$ равен $180° - \varphi$. Поэтому $AC = AB\ \cos(180°-\varphi) = -AB\cos\varphi$. В рассматриваемом случае $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{e}$, и потому

$$v_x = -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = -AC = AB\ \cos\varphi = \left|\vec{v}\right|\cos\varphi,$$

т. е. снова выполняется (4). Если точка $A$ лежит на прямой $x$, то доказательство лишь упрощается.

5) Угол $\varphi=180°$. Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{e}$ (рис. 33, *е*), $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ и $v_x=-\left|\vec{v}\right|$. Так как $\cos 180°=-1$, то (4) снова имеет место.■

## 21.4. Свойства проекций векторов на ось

**Свойство 1.**

**Равные векторы имеют равные проекции на заданную ось.**

**Доказательство.** По лемме о проекции вектора проекция вектора на ось зависит лишь от длины вектора и угла, который он образует с данной осью. Равные же векторы имеют, во-первых, равные длины и, во-вторых, образуют с осью один и тот же угол (рис. 34). Следовательно, их проекции на ось равны.■

Тем самым мы установили, что *проекция вектора на ось не зависит от точки откладывания вектора.*

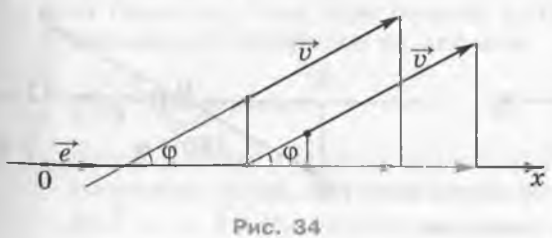



Рис. 34

**Свойство 2.**

**При сложении векторов их проекции на ось складываются.**

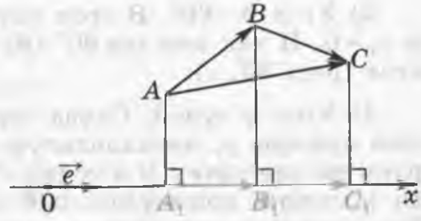


Рис. 35

**Доказательство.** Сложим любые два вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Получим вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 35). Пусть точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — проекции точек $A$, $B$, $C$ на ось $x$, а $x_A$, $x_B$, $x_C$ — их координаты и $a_x$, $b_x$, $c_x$ — проекции векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ на ось $x$.

Так как $a_x=x_B-x_A$, $b_x=x_C-x_B$, то $a_x+b_x=$ $=x_B-x_A+x_C-x_B=x_C-x_A$.

С другой стороны, $c_x=x_C-x_A$. Поэтому $c_x=$ $=a_x+b_x$. ■

**Свойство 3.**

**При умножении вектора на число его проекция умножается на это число.**

**Доказательство.** Пусть $x$ — ось с начальной точкой $O$ и единичным вектором $\vec{e}$. Возьмем любой вектор $\vec{a}$ и отложим его от точки $O$: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ (рис. 36). Пусть $\varphi$ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$. Умножим вектор $\vec{a}$ на число $\alpha$. Получим вектор $\vec{b}=\overrightarrow{OB}=\alpha\vec{a}$. Мы хотим доказать, что $b_x=\alpha a_x$. Возможны следующие случаи:

1) $\alpha>0$ (рис. 36, *а*). Тогда $\angle\vec{b}\,\vec{e}=\varphi$. Кроме того, $|\vec{b}|=|\alpha||\vec{a}|$, т. е. $OB=\alpha OA$. Поэтому $b_x=|\vec{b}|\cos\varphi=$ $=OB\cos\varphi=\alpha\, OA\cos\varphi=\alpha\, a_x$.

2) $\alpha<0$ (рис. 36, *б*). В этом случае $\angle\vec{b}\,\vec{e}=180°-\varphi$. Кроме того, $|\vec{b}|=|\alpha||\vec{a}|$, т. е. $OB=$

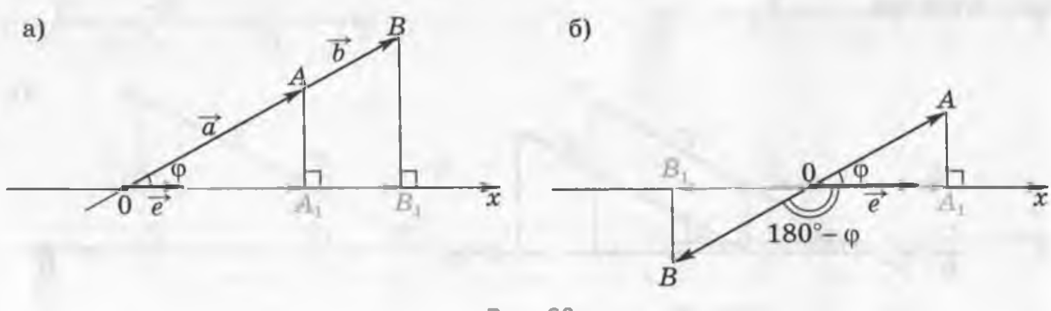


Рис. 36

$=|\alpha|OA$. А так как $\alpha<0$, то $|\alpha|=-\alpha$ и потому $OB=-\alpha OA$. Следовательно,
$b_x=|\vec{b}|\cos(180°-\varphi)=-OB\cos\varphi=\alpha OA\cos\varphi=\alpha a_x$.

3) $\alpha=0$. Тогда $\vec{b}=\alpha\vec{a}=\vec{0}$, и потому $b_x=0$ и $b_x=$ $=\alpha a_x$. ■

## Вопросы

1. Как найти угол между: а) векторами; б) вектором и осью?
2. Что такое проекция вектора на ось? В чем разница между проекцией вектора на ось и проекцией отрезка на ось?
3. Какими способами можно вычислить проекцию вектора на ось?
4. Какие вы знаете свойства проекций вектора на ось?

## Задачи к § 21

### Дополняем теорию

**21.1** **2–4** Пусть известны проекции на ось двух векторов. Как вычислить проекцию на эту ось линейной комбинации данных векторов? Приведите примеры.

### Рисуем

**21.2** **2–4** Нарисуйте в системе координат вектор, проекция которого на ось $x$ равна: а) 2; б) 0; в) $-3$. Чему равна проекция построенного вами вектора на ось $y$?

### Представляем

**21.3** **2–4** а) Проекции двух векторов на данную ось равны. Следует ли из этого, что равны сами векторы? равны их длины?
б) Верно ли, что больший по длине вектор имеет большую проекцию на данную ось?
в) Верно ли, что, чем больше угол между вектором и осью, тем меньше его проекция на эту ось?

### Планируем

**21.4** **1** Пусть известны длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угол между ними. Как вычислить углы, которые образуют с данными векторами векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$? Как вычислить угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$?

## Работаем с формулой

**21.5** **2–4** Запишите формулу для вычисления проекции вектора на ось. Зафиксируйте одну из величин в этой формуле. В какой зависимости между собой находятся при этом другие величины?

## Находим величину

**21.6** **1** Дан треугольник $ABC$. Чему равен угол между такими векторами: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CA}$, если данный треугольник: а) равносторонний; б) имеет $\angle A = \alpha$, а $\angle B = \beta$?

**21.7** **1** Чему равен угол между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если известно, что $\angle \vec{b}\,\vec{a} = \varphi_1$, $\angle \vec{c}\,\vec{a} = \varphi_2$?

**21.8** **1** Пусть $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — два единичных вектора и $\angle \vec{e}_1\vec{e}_2 = \varphi$. Найдите угол, который образует с данными векторами вектор $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Найдите угол между векторами $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

**21.9** **1** Пусть $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — два единичных вектора. При каком угле между ними: а) $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| = 2$; б) $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| > 1$; в) $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| = 1$; г) $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| < 1$?

**21.10** **1** Пусть $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — два единичных перпендикулярных вектора, $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Вычислите $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$, угол между $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.

**21.11** **1** Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a} \perp \vec{b}$. Вычислите угол между: а) $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ и $3\vec{a} - \vec{b}$.

**21.12** **1** Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что $|\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$. Найдите $\angle \vec{a}\,\vec{b}$.

**21.13** **2–4** При каком угле между вектором и осью проекция вектора на эту ось: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю?

**21.14** **2–4** Пусть даны точки $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(-1, -1)$, $D(-5, -4)$. Вычислите проекции на оси координат векторов: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{DA}$.

**21.15** **2–4** Чему равны проекции единичного вектора на оси координат, если он составляет с осью $x$ угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 120°; д) 135°; е) 150°?

**21.16** **2–4** Пусть вектор составляет с осью $x$ угол: а) 30°; б) 135°. Его проекция на ось $x$ равна 1. Вычислите его длину и проекцию на ось $y$.

**21.17** **2–4** Какой угол образует вектор единичной длины с осью, если его проекция на ось равна: а) $-0{,}5$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 1?

**21.18** **2–4** В прямоугольном треугольнике $ABC$ гипотенуза $AB$ равна 1, а $\angle B = 30°$. Вычислите проекции: а) $\overrightarrow{AB}$ на ось $CA$; б) $\overrightarrow{AB}$ на ось $CB$; в) $\overrightarrow{BC}$ на ось $CB$; г) $\overrightarrow{AC}$ на ось $BA$; д) $\overrightarrow{BC}$ на ось $BA$; е) $\overrightarrow{BC}$ на ось $CA$.

**21.19** 2–4 Даны векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$. Чему равна проекция каждого из них на ось, проходящую через другой, если треугольник $ABC$: а) равносторонний со стороной 1; б) равнобедренный с основанием 2 и углом $120°$ при вершине $A$; в) равнобедренный с боковой стороной 1 и углом $\varphi$ при основании $BC$; г) такой: $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 6$?

**21.20** 2–4 Пусть проекция вектора $\vec{a}$ на ось $x$ равна 2, проекция вектора $\vec{b}$ на ось $x$ равна $-3$, проекция вектора $\vec{c}$ на ось $x$ равна 4. Чему равна проекция на ось $x$ вектора: а) $-2\vec{a}$; б) $\vec{b} + \vec{c}$; в) $\vec{c} - \vec{a}$; г) $3\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$; д) $-\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$?

**21.21** 2–4 Пусть вектор $\vec{a}$ длиной 1 образует с осью $x$ угол $30°$, а вектор $\vec{b}$ длиной 2 образует с осью $x$ угол $135°$. Чему равна проекция на ось $x$ вектора: а) $2\vec{a}$; б) $-3\vec{b}$; в) $\vec{a} + \vec{b}$; г) $\vec{b} - \vec{a}$; д) $0{,}5\vec{a} - 3\vec{b}$; е) $-2\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$?

**21.22** 2–4 Нарисуйте систему координат. Чему равны проекции на оси векторов: а) $\vec{i} + \vec{j}$; б) $\vec{i} - \vec{j}$; в) $-\vec{i} + \vec{j}$; г) $-\vec{i} - \vec{j}$; д) $2\vec{i} - 3\vec{j}$; е) $-0{,}5\vec{i} + 4\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы осей $x$ и $y$? Какой угол составляют эти векторы с осью $x$?

### Исследуем

**21.23** 2–4 Найдите условия, при которых: а) вектор $\vec{a} + \vec{b}$ идет по биссектрисе угла, заданного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

**21.24** 2–4 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют с единичным вектором $\vec{c}$ углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$. При этом $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Можно ли найти длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угол между ними?

### Участвуем в олимпиаде

**21.25** Десять векторов таковы, что длина суммы любых девяти из них меньше длины суммы всех. Докажите, что существует ось, проекции этих десяти векторов на которую имеют одинаковые знаки.

# § 22. Координаты вектора

## 22.1. Разложение вектора по осям координат

Выполнять геометрически операции с векторами не всегда удобно. Например, надо сложить десять векторов, да еще умноженных на некоторые числа. Но если на плоскости ввести систему координат, то каждый вектор можно задать парой чисел — его проекциями на оси координат.

И тогда окажется, что действия с векторами можно свести к аналогичным действиям с парами чисел, что куда проще. Следующая теорема вводит координаты вектора.

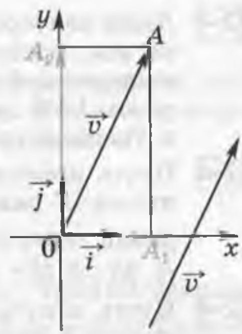


Рис. 37

Теорема 28 *(о координатах вектора).*

**Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Единичные векторы осей $x$ и $y$ обозначим $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Пусть $\vec{v}$ — некоторый вектор, а $v_x$ и $v_y$ — его проекции на оси координат. Тогда**

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}. \qquad (1)$$

Пара чисел $v_x$, $v_y$ называется **координатами вектора** $\vec{v}$ в данной системе координат.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{v}$ от начала координат — точки $O$. Получим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ (рис. 37). Пусть точки $A_1$ и $A_2$ — проекции точки $A$ на координатные оси $x$ и $y$. Тогда

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2. \qquad (2)$$

Как доказано в п. 21.2 (равенство (1)), $\overrightarrow{OA}_1 = v_x\vec{i}$. Аналогично $\overrightarrow{OA}_2 = v_y\vec{j}$. Подставляя эти равенства в (2), получаем равенство (1). ■

Верно утверждение о единственности координатного представления вектора: *если для вектора $\vec{v}$ выполняется равенство*

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}, \qquad (3)$$

*то пара чисел $(a, b)$ является проекциями вектора $\vec{v}$ на оси $x$ и $y$, т. е.*

$$a = v_x,\ b = v_y. \qquad (4)$$

Докажем его. Из равенств (1) и (3) следует, что $a\vec{i} + b\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$. Отсюда

$$a\vec{i} - v_x\vec{i} = v_y\vec{j} - b\vec{j}. \qquad (5)$$

Слева в (5) стоит вектор, коллинеарный вектору $\vec{i}$, а справа — вектор, коллинеарный вектору $\vec{j}$. Так как $\vec{i} \perp \vec{j}$, то векторы $a\vec{i} - v_x\vec{i}$ и $v_y\vec{j} - b\vec{j}$ взаимно перпендикулярны. Но взаимно перпендикулярные векторы равны лишь в одном случае — когда они нулевые. Поэтому $a\vec{i} - v_x\vec{i} = \vec{0}$ и $v_y\vec{j} - b\vec{j} = \vec{0}$. Следовательно, $a\vec{i} = v_x\vec{i}$ и $b\vec{j} = v_y\vec{j}$. По свойству 5 операции умножения вектора на число (п. 20.1) из этих равенств следуют равенства (4). ■

Таким образом, на координатной плоскости любой вектор $\vec{v}$ можно задать его координатами $v_x$, $v_y$ и писать короче: $\vec{v} = (v_x, v_y)$ вместо равенства (1).

## 22.2. Длина вектора

Зная координаты вектора и используя теорему Пифагора, можно найти длину вектора. Вернемся к рисунку 37. Если точка $A$ не лежит на координатных осях, то треугольник $OAA_1$ прямоугольный. Поэтому

$$OA^2 = OA_1^2 + A_1A^2. \tag{6}$$

Так как $A_1A = OA_2$, то из (6) получаем, что

$$OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2. \tag{7}$$

Но $OA = |\vec{v}|$, $OA_1 = |v_x|$, $OA_2 = |v_y|$. Поэтому (7) можно записать так:

$$|\vec{v}|^2 = |v_x|^2 + |v_y|^2,$$

т. е.

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2. \tag{8}$$

Формула (8) справедлива и в тех случаях, когда точка $A$ лежит на какой-то оси координат (объясните это подробнее).

Итак, *квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат.*

Из (8) получаем формулу длины вектора:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{9}$$

Дайте ей словесную формулировку.

## 22.3. Свойства координат векторов

Прежде чем свести действия с векторами к действиям с их координатами, мы должны доказать свойства координат вектора. Так как они являются проекциями вектора на координатные оси, то свойства координат повторяют свойства проекций.

Свойство 1.

**Координаты равных векторов соответственно равны. Обратно: векторы, имеющие соответственно равные координаты, равны.**

Первое утверждение вытекает из первого свойства проекций (п. 21.4). Второе вытекает из равенства (1).

**Свойство 2.**

**При сложении векторов их соответствующие координаты складываются. А именно если $\vec{a}=(a_x, a_y)$, $\vec{b}=(b_x, b_y)$ и $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, то $\vec{c}=(a_x+b_x, a_y+b_y)$, т. е.**

$$c_x=a_x+b_x,\ c_y=a_y+b_y. \qquad (10)$$

Это свойство вытекает из второго свойства проекций (п. 21.4).

**Свойство 3.**

**При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. А именно если $\vec{a}=(a_x, a_y)$, $\vec{b}=(b_x, b_y)$ и $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, то $\vec{b}=(\alpha a_x, \alpha a_y)$, т. е.**

$$b_x=\alpha a_x,\ b_y=\alpha a_y. \qquad (11)$$

Свойство 3 вытекает из свойства 3 проекций вектора (п. 21.4).

Это свойство позволяет по-другому сформулировать признак коллинеарности векторов (теорема 27 п. 20.2): *ненулевой вектор $\vec{a}=(a_x, a_y)$ и вектор $\vec{b}=(b_x, b_y)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т. е. выполняются равенства* (11).

Действительно, если выполняются равенства (11), то $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ и $\vec{b}\parallel\vec{a}$ (по теореме 27). Обратно: если $\vec{b}\parallel\vec{a}$, то $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ (по теореме 27) и по свойству 3 выполняются равенства (11). ■

## 22.4. Свойства операций с векторами

Свойства координат позволяют, как мы говорили, свести действия с векторами к арифметическим действиям. Именно на этом основаны простые и единообразные доказательства важных свойств операций с векторами. Сформулируем их.

1. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$.
2. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.
3. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Эти три свойства справедливы для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел $\alpha$, $\beta$. Докажем, например, второе из них.

Пусть $\vec{a}=(a_x, a_y)$. Тогда $(\alpha+\beta)\vec{a}=((\alpha+\beta)a_x, (\alpha+\beta)a_y)$ по свойству 3 п. 22.3. Далее, по свойствам 2 и 3 п. 22.3

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}=(\alpha a_x+\beta a_x,\ \alpha a_y+\beta a_y).$$

Но для чисел $\alpha$, $\beta$, $a_x$, $a_y$ верны равенства

$$(\alpha+\beta)a_x=\alpha a_x+\beta a_x \text{ и } (\alpha+\beta)a_y=\alpha a_y+\beta a_y.$$

Поэтому соответственные координаты векторов $(\alpha+\beta)\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ равны. По свойству 1 п. 22.3 эти векторы равны. ■

Свойства 1 и 3 докажите самостоятельно.

## 22.5. Связь координат векторов и координат точек

Доказывая теорему 28 о разложении вектора по координатным осям, мы откладывали его от начала координат. Это вовсе не обязательно. Например, отложим вектор $\vec{v}$ от точки $A(x_1, y_1)$ и пусть его концом будет точка $B(x_2, y_2)$ (рис. 38). Спроектируем точки $A$, $B$ в точки $A_1$, $B_1$ на ось $x$ и в точки $A_2$, $B_2$ на ось $y$. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1}=v_x\vec{i}$, $\overrightarrow{A_2B_2}=v_y\vec{j}$ и $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$.

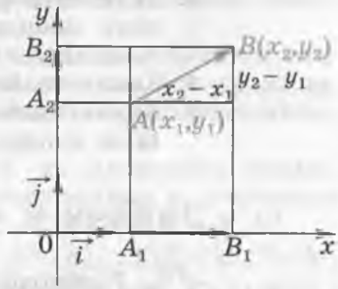


Рис. 38

Вычисляя проекции вектора через координаты его начала и конца (см. п. 21.2), получаем:

$$v_x=x_2-x_1,\ v_y=y_2-y_1. \qquad (12)$$

Поэтому

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}. \qquad (13)$$

Итак, *чтобы найти координаты вектора, нужно от координат конца вектора отнять координаты начала вектора.*

В частности, *если вектор отложен от начала координат, то координаты вектора равны координатам его конца.*

## 22.6. Формула расстояния между точками

Умея найти длину вектора по его координатам, мы можем теперь выразить и расстояние между точками через их координаты. А именно пусть даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Тогда расстояние между точками $A$ и $B$ — это длина вектора $\overrightarrow{AB}$, т. е. $AB=|\overrightarrow{AB}|$ (рис. 39). Так как координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ являются разности $x_2-x_1$ и $y_2-y_1$, то

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (14)$$

Это и есть формула расстояния между точками.

Итак, *расстояние между точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей их координат.* ●

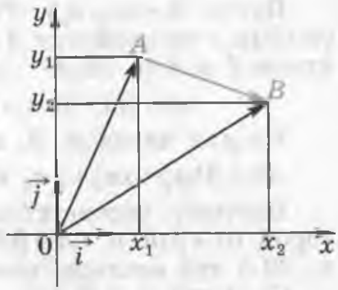


Рис. 39

## Вопросы

1. Для чего вводятся координаты вектора?
2. Как найти координаты вектора?
3. Запишите формулу: а) длины вектора; б) координат вектора, зная координаты его начала и конца; в) расстояния между точками.
4. Какие свойства имеют координаты вектора? Докажите их.
5. Какие свойства действий с векторами доказываются с помощью координат векторов? Докажите их.

## Задачи к § 22

### Разбираемся в решении

**22.1** **6** Пусть известны расстояния от точки $K$ до трех вершин прямоугольника. Сможете ли вы найти расстояние от $K$ до его четвертой вершины, если точка $K$ лежит: а) внутри прямоугольника; б) вне его; в) вне плоскости прямоугольника?

**Решение.** Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник. Раз задача решается с помощью системы координат, то эту систему координат надо как-то ввести, «привязав» ее к данной фигуре. Всегда систему координат удобнее вводить так, чтобы данная фигура была расположена в ней наиболее симметричным образом. В данной задаче мы выберем начало координат в точке $O$ пересечения диагоналей прямоугольника, а оси координат направим параллельно его сторонам (рис. 40, *а*).

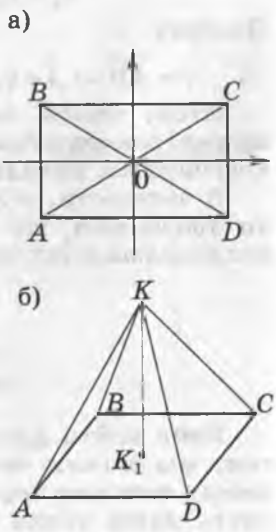


Рис. 40

Пусть точка $C$ имеет координаты $(a, b)$, тогда очевидно, что $D(a, -b)$, $A(-a, -b)$,

$B(-a,\ b)$. Координаты точки $K$ обозначим $(x,\ y)$. Тогда, обозначив для краткости $KA=d_1$, $KB=d_2$, $KC=d_3$, $KD=d_4$, получим систему равенств:

$$\begin{aligned}
(x+a)^2+(y+b)^2&=d_1^2,\\
(x+a)^2+(y-b)^2&=d_2^2,\\
(x-a)^2+(y-b)^2&=d_3^2,\\
(x-a)^2+(y+b)^2&=d_4^2.
\end{aligned}$$

(Для удобства, чтобы избежать корней, мы записали формулы квадратов данных расстояний.)

Пусть, например, известны $d_1$, $d_2$, $d_3$ и требуется найти $d_4$. Неизвестны в этой системе четыре величины $x$, $y$, $a$, $b$, и уравнений в системе тоже четыре, так что задачу решить вроде бы можно (?). Осталось проделать выкладки. Делать их напрямую довольно долго, но, раскрыв скобки во всех уравнениях системы и заметив, что $d_1^2+d_3^2=d_2^2+d_4^2$, прийти к результату можно быстрее (?).

Для решения задачи совершенно неважно, где находится точка $K$ — внутри или вне прямоугольника или на его границе. А вот если точка $K$ находится вне плоскости прямоугольника, то положение дел меняется.

Пусть точка $K_1$ — проекция точки $K$ на плоскость прямоугольника (рис. 40, *б*), т. е. $KK_1$ — перпендикуляр к плоскости $ABC$. Для точки $K_1$ верно равенство $K_1A^2+K_1C^2=K_1B^2+K_1D^2$.

Обозначим $KK_1=h$. Тогда $KA^2=K_1A^2+h^2$, $KC^2=K_1C^2+h^2$, $KB^2=K_1B^2+h^2$, $KD^2=K_1D^2+h^2$, откуда и получаем $KA^2+KC^2=$ $=KB^2+KD^2$.

Задачу можно обобщить. (Как?) И любопытно, что результат не зависит от сторон прямоугольника!

## Дополняем теорию

22.2 **1** Пусть $\vec{a}$ — единичный вектор, $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — углы, которые он образует с осями координат. Докажите, что $\vec{a}=\cos\varphi_1\vec{i}+\cos\varphi_2\vec{j}$ и $\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2=1$.

22.3 **3** а) Дан вектор $\vec{a}=(x,\ y)$. Каковы координаты вектора $-\vec{a}$? Чему равна его длина?

б) Даны векторы $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$ и $\vec{b}=(x_2,\ y_2)$. Каковы координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$? Каковы координаты вектора $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$? Как найти длину вектора $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$? Приведите примеры.

22.4 **5** а) Каждая из двух прямых задана координатами двух своих точек. Как выяснить, будут ли они параллельны? будут ли они совпадать? Приведите примеры.

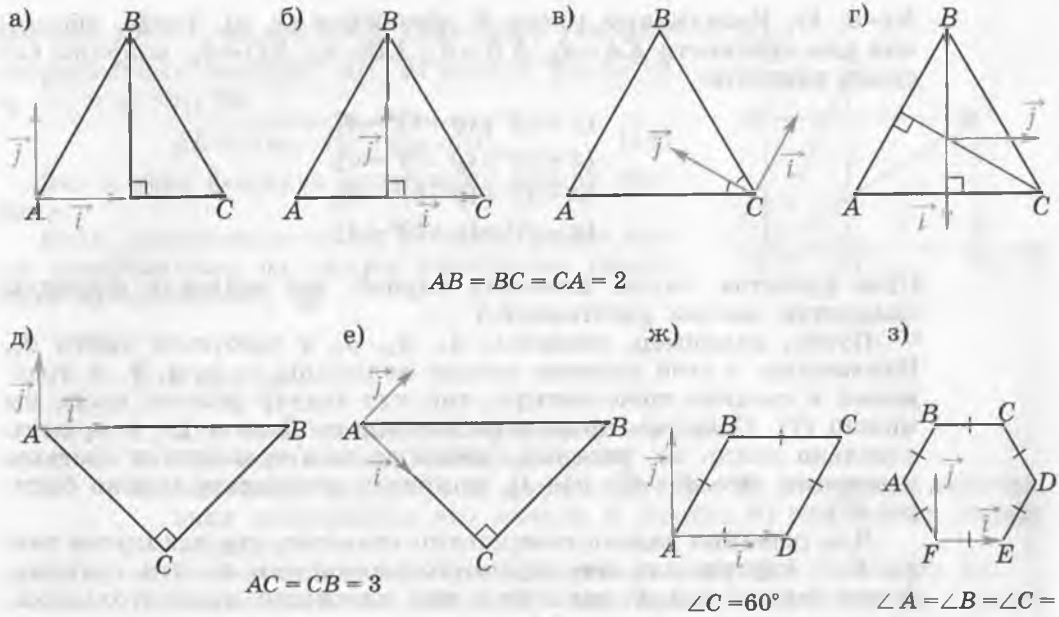



Рис. 41

б) Известны координаты трех точек. Как узнать, лежат ли они на одной прямой? Приведите примеры.

**22.5** **5** Пусть известны координаты точек $A$ и $B$ и пусть $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Как найти координаты точки $X$? Обобщите задачу.

**22.6** **6** Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Смотрим

**22.7** **1** Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ исходя из рисунка 41.

Планируем

**22.8** **4** Даны три точки $A, B, C$. Как найти точку $X$, такую, что $\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{XB} - 3\overrightarrow{XC} = \vec{0}$?

**22.9** **5** От точки $A$ откладывают вектор $\vec{a}$ и получают точку $B$ — конец вектора $\vec{a}$. Пусть известны координаты точки $A$ и вектора $\vec{a}$. Как найти координаты точки $B$? Как решить обратную задачу? Приведите примеры.

**22.10** **5** Пусть известны координаты вершин треугольника. а) Как найти координаты векторов, заданных его медианами, биссектрисами, высотами? Приведите примеры. б) Как найти координаты точки пересечения медиан, точки пересечения биссектрис? Приведите примеры.

**22.11** **5** Пусть известны координаты трех вершин параллелограмма. Как найти координаты его четвертой вершины? Сможете ли вы решить аналогичную задачу для равнобокой трапеции?

**22.12** **6** Пусть известны координаты четырех точек. Как проверить, являются ли они вершинами: а) параллелограмма; б) ромба; в) прямоугольника; г) квадрата; д) равнобокой трапеции; е) выпуклого четырехугольника?

**22.13** **6** Как вычислить площадь четырехугольника, зная координаты его вершин? Приведите пример. Обобщите задачу.

**22.14** **6** Пусть известны координаты двух вершин квадрата. Сможете ли вы найти координаты двух других его вершин? Как вы обобщите эту задачу?

**22.15** **6** Пусть известны координаты вершин треугольника. Как найти координаты точки пересечения его высот (или их продолжений), если пользоваться только формулой для вычисления расстояний?

### Находим величину

**22.16** **1** Какие координаты имеет единичный вектор $\vec{a}$, образующий с осью $x$ угол: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°? Как изменятся эти результаты, если вектор $\vec{a}$ будет иметь длину $d$?

**22.17** **1** Найдите числа α и β из равенств:
а) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=2\vec{i}-3\vec{j}$; б) $\alpha\vec{i}+2\vec{j}=-3\vec{i}-\beta\vec{j}$;
в) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=2\vec{i}$; г) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=-3\vec{j}$; д) $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=\vec{0}$.

**22.18** **1** Систему координат повернули вокруг начала координат на угол 45° против часовой стрелки. Новое положение вектора $\vec{i}$ обозначим $\vec{i_1}$, а новое положение вектора $\vec{j}$ обозначим $\vec{j_1}$. а) Каковы координаты векторов $\vec{i_1}$ и $\vec{j_1}$ в старой системе координат? б) Каковы координаты векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в новой системе координат? в) Попытайтесь решить задачу в общем случае, когда угол поворота системы координат равен φ.

**22.19** **3** Даны векторы $\vec{a}=(1, -2)$ и $\vec{b}=(-3, -1)$. Каковы координаты векторов: а) $2\vec{a}$; б) $-3\vec{b}$; в) $\vec{a}+\vec{b}$; г) $\vec{b}-\vec{a}$; д) $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$? Чему равны длины этих же векторов?

**22.20** **3** Какие координаты имеют векторы: а) $\vec{i}+\vec{j}$; б) $-\vec{i}+\vec{j}$; в) $\vec{i}-\vec{j}$; г) $-\vec{i}-\vec{j}$; д) $-2\vec{i}+3\vec{j}$; е) $\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}$? Чему равны длины этих векторов?

**22.21** **3** Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
а) $\vec{a}=(-2, 1)$, $\vec{b}=(4, -2)$; б) $\vec{a}=(1, -3)$, $\vec{b}=(1, 3)$;
в) $\vec{a}=(3, -2)$, $\vec{b}=(-3, 2)$; г) $\vec{a}=(1, 0)$, $\vec{b}=(3, 0)$;
д) $\vec{a}=(0, -1)$, $\vec{b}=(1, 0)$; е) $\vec{a}=(0, 0)$, $\vec{b}=(-2, -1)$?

**22.22** **3** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Каковы их недостающие координаты: а) $\vec{a}=(1, -2)$, $\vec{b}=(3, \ldots)$; б) $\vec{a}=(\ldots, 2)$, $\vec{b}=(4, -1)$; в) $\vec{a}=(-2, \ldots)$, $\vec{b}=(\ldots, -2)$; г) $\vec{a}=(-1, \ldots)$, $\vec{b}=(2, \ldots)$?

**22.23** **3** Дан вектор $\vec{a}=(1, -1)$. Запишите координаты вектора: а) противоположного $\vec{a}$; б) коллинеарного $\vec{a}$; в) коллинеарного $\vec{a}$ и имеющего единичную длину.

**22.24** **3** Даны векторы $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(-2, -1)$, $\vec{c}=(-4, 4)$. Каждый из них запишите как линейную комбинацию других.

**22.25** **4** Упростите такие выражения:
а) $5(-3\vec{a})$; б) $-2(-4\vec{x})$; в) $-3\vec{p}+2\vec{p}$; г) $4\vec{b}-2\vec{b}$; д) $2\vec{a}-2\vec{b}$;
е) $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{a}$; ж) $3(-4\vec{a})-4(-3\vec{a})$; з) $\vec{a}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$; и) $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})$.

**22.26** **4** Выразите один из векторов равенства через другие:
а) $2\vec{a}+3\vec{b}=\vec{0}$; б) $3\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}=\vec{0}$; в) $-2\vec{p}+3\vec{q}-\frac{1}{4}\vec{r}=\vec{0}$.

**22.27** **4** Решите векторное уравнение:
а) $2\vec{x}-\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$; б) $3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{x}-\vec{b}=\vec{0}$.

**22.28** **4** Пусть $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{y}=-\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}$.
а) Запишите как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $-2\vec{x}$, $\frac{1}{4}\vec{y}$, $3\vec{x}-2\vec{y}$, $-\vec{x}-\vec{y}$. б) Докажите, что любая линейная комбинация векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ является, в свою очередь, линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. в) Верно ли обратное?

**22.29** **4** В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $O$. Выразите как линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$. Выразите как линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

**22.30** **4** В треугольнике $ABC$ точка $K$ — середина $AC$, точка $L$ — середина $AB$, точка $M$ — середина $BC$. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Выразите как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие векторы: а) $\overrightarrow{BK}$; б) $\overrightarrow{CL}$; в) $\overrightarrow{KM}$; г) $\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{MK}$; д) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{BK}$. Решите какую-либо обратную задачу.

**22.31** **4** а) Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Выразите как линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_5}$ векторы $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$. Решите обратную задачу.

б) Решите аналогичную задачу для какого-либо другого правильного многоугольника.

**22.32** 5 Каковы координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(0,\ 1)$, $B(1,\ 0)$; б) $A(-2,\ 1)$, $B(-4,\ 2)$; в) $A(p,\ q)$, $B(-p,\ -q)$?

**22.33** 5 Заданы точки $A(-1,\ 3)$, $B(2,\ -4)$, $C(-3,\ -1)$, $D(5,\ 2)$. Есть ли среди векторов, начала и концы которых находятся в данных точках, равные? Вычислите координаты таких векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$; в) $2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}$; г) $-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$. Вычислите длины этих же векторов.

**22.34** 5 Пусть точка $O$ — начало координат, а точка $A_1$ такова, что $\overrightarrow{OA_1}=(1,\ -2)$. Какие координаты имеет точка $A_2$, такая, что $\overrightarrow{A_1A_2}=(-2,\ 3)$? Обобщите задачу.

**22.35** 5 Даны точки $A(-1,\ 3)$ и $B(5,\ -3)$. Найдите координаты точки: а) $C_1$, такой, что она является серединой отрезка $AB$; б) $C_2$, такой, что точка $B$ является серединой отрезка $AC_2$; в) $C_3$, такой, что она делит отрезок $AB$ в отношении $2:1$; г) $C_4$, такой, что точка $A$ делит отрезок $BC_4$ в отношении $3:2$.

**22.36** 5 а) Из начала координат выходит вектор $\vec{a_1}$ единичной длины, который образует с вектором $\vec{i}$ угол $\varphi<90°$. Каковы координаты вектора $\vec{a_1}$?

б) Из конца вектора $\vec{a_1}$ выходит вектор $\vec{a_2}$ единичной длины, который образует с вектором $\vec{a_1}$ угол $\varphi$. Каковы координаты вектора $\vec{a_2}$? Обобщите задачу.

**22.37** 6 Даны точки $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 3)$, $C(1,\ -2)$. а) Вычислите стороны треугольника $ABC$. б) Установите его вид (по углам).

**22.38** 6 Вершины пятиугольника $ABCDE$ таковы: $A(1,\ 1)$, $B(-1,\ 2)$, $C(3,\ 2)$, $D(3,\ -1)$, $E(-1,\ -2)$. Вычислите: а) самую длинную сторону; б) самую короткую сторону; в) самую длинную диагональ; г) самую короткую диагональ; д) его углы; е) его площадь.

## Доказываем

**22.39** 4 Докажите, что $x(\vec{a}-\vec{b})=x\vec{a}-x\vec{b}$.

**22.40** 6 Используя координаты, докажите: а) неравенство треугольника; б) теорему о средней линии треугольника.

## Исследуем

**22.41** 4 Будут ли коллинеарны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если коллинеарны векторы: а) $-2\vec{a}$ и $\frac{1}{3}\vec{b}$; б) $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$; в) $\vec{a}-\vec{b}$ и $2\vec{b}$; г) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$; д) $-3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ и $-2\vec{a}$; е) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ и $-3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; ж) $\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}$ и $\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}$?

# § 23. Скалярное умножение

## 23.1. Определение скалярного произведения

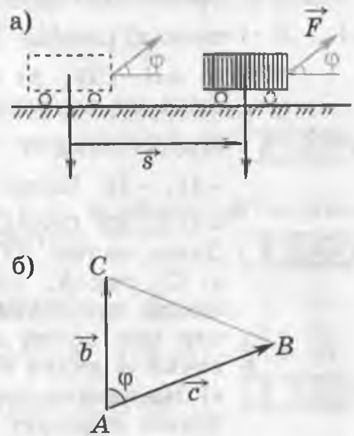


Рис. 42

В дальнейшем мы используем еще одну операцию с векторами. Из курса физики вам известно, что механическая работа $A$, совершаемая постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ тела (рис. 42, *а*), равна произведению: $A=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\varphi$, где $\varphi=\angle\vec{F}\vec{s}$. Аналогичное произведение $bc\cos A$ входит и в формулу ОТП. Но в этом случае стороны $b$ и $c$ треугольника $ABC$ надо рассматривать как векторы $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$ (рис. 42, *б*). Можно привести и другие, как физические, так и геометрические, примеры, где появляется подобное произведение. Например, все задачи, где рассматриваются проекции вектора на оси.

Действительно, сама проекция вектора $\vec{v}$ на ось с единичным вектором $\vec{e}$ вычисляется именно как такое произведение: $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{v}=|\vec{v}||\vec{e}|\cos\varphi$. Оно называется скалярным произведением векторов.

**Итак, скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их модулей и косинуса угла между ними.**

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обычно обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким образом, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,\ \text{где}\ \varphi=\angle\vec{a}\vec{b}. \qquad (1)$$

**Если хотя бы один из векторов нулевой, то полагают $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.**

Отметим два важных частных случая:

1) Если $\vec{a}=\vec{b}$, то $\varphi=0°$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и из (1) следует, что $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$. Произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ обозначается $\vec{a}^{\,2}$ и называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$. Итак, $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$.

2) *Для любых ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ их скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}\perp\vec{b}$.* Действительно, если $\vec{a}\neq 0$ и $\vec{b}\neq 0$, то из (1) следует, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тогда и только тогда, когда $\cos\varphi=0$, т. е. при $\vec{a}\perp\vec{b}$.

## 23.2. Выражение скалярного произведения через координаты

Докажем, что *скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.* Это значит, что для векторов $\vec{a}=(x_1, y_1)$ и $\vec{b}=(x_2, y_2)$ их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=x_1x_2+y_1y_2. \qquad (2)$$

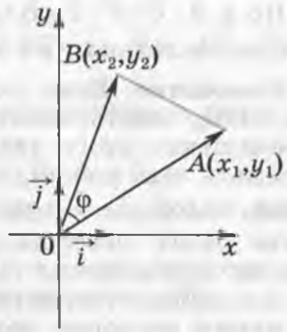


Рис. 43

Рассмотрим сначала случай, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Отложим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от начала $O$. Получим векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 43). Точка $A$ имеет координаты $x_1$, $y_1$, а точка $B$ — координаты $x_2$, $y_2$. В треугольнике $OAB$ $\angle O=\angle\vec{a}\vec{b}$. Положим $\varphi=\angle\vec{a}\vec{b}$ и вычислим по ОТП сторону $AB$ треугольника $OAB$. Получим:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi. \qquad (3)$$

Но $OA \cdot OB\cos\varphi=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, т. е. $OA \cdot OB\cos\varphi=\vec{a} \cdot \vec{b}$. Используем последнее равенство и получим из (3), что

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2). \qquad (4)$$

По формуле расстояния между двумя точками

$$OA^2=x_1^2+y_1^2,\ OB^2=x_2^2+y_2^2,$$
$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2. \qquad (5)$$

Подставляя эти выражения в (4) и упрощая, получаем (2).

Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них получается из другого умножением на число. Пусть, например, $\vec{b}=k\vec{a}$. Тогда $x_2=kx_1$, $y_2=ky_1$. Дальнейшие рассуждения проведите самостоятельно. ■

## 23.3. Свойства скалярного умножения

Следующие свойства выполняются для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа $x$:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b}=\vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(x\vec{a}) \cdot \vec{b}=x(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c}=\vec{a} \cdot \vec{c}+\vec{b} \cdot \vec{c}$.

Все эти свойства следуют из формулы (2). Проверим, например, свойство 3. Положим

$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2)$ и $\vec{c}=(x_3,\ y_3)$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}= =(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$. Поэтому $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(x_1+x_2)x_3+ +(y_1+y_2)y_3=x_1x_3+x_2x_3+y_1y_3+y_2y_3$.

Но и $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=x_1x_3+x_2x_3+y_1y_3+y_2y_3$.

Следовательно, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$. ■

**Замечание.** Если понимать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как силы, действующие на тело, а вектор $\vec{c}$ как перемещение этого тела, то свойство 3 можно понимать так: работа, совершаемая результирующей силой $\vec{a}+\vec{b}$ при перемещении $\vec{c}$, равна сумме работ, совершаемых силами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при том же перемещении $\vec{c}$. ■

Доказанные свойства вместе со свойствами сложения векторов позволяют скалярно умножать суммы и разности векторов по правилам обычной алгебры. Например:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2= =\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

## Вопросы

1. Какие задачи приводят к понятию скалярного произведения?
2. Как вычислить скалярное произведение двух векторов?
3. При каком условии скалярное произведение равно нулю?
4. Какие свойства имеет скалярное умножение? В чем оно похоже на умножение чисел? А в чем разница между ними?
5. Как можно вычислить угол между векторами? Какова формула для вычисления этого угла, если векторы заданы своими координатами?

## Задачи к § 23

Разбираемся в решении

**23.1** **3** Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ — любые точки плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. Будет ли равенство верно для точек пространства?

**Решение.** Любопытно, что эту задачу можно решить, ничего не рисуя,— это и есть векторная алгебра!

А решать эту задачу удобнее всего в радиус-векторной технике. Выберем некоторую точку $O$ за начало всех векторов, которые нам понадобятся в этой задаче. Пусть в каждую из данных точек идут из точки $O$ векторы: в точку $A$ вектор $\overrightarrow{OA}$, в точку $B$

вектор $\overrightarrow{OB}$ и т. д. Так как во все данные точки векторы идут из точки $O$, то можно даже условиться писать для краткости так: $\vec{A}$ вместо $\overrightarrow{OA}$, $\vec{B}$ вместо $\overrightarrow{OB}$ и т. д. Вектор $\overrightarrow{AB}$, равный разности векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$, запишем так: $\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}$.

Аналогично $\overrightarrow{CD}=\vec{D}-\vec{C}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{D}-\vec{A}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{C}-\vec{B}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{C}-\vec{A}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{D}-\vec{B}$.

В принятых нами обозначениях требуется доказать такое равенство:

$$(\vec{B}-\vec{A})\cdot(\vec{D}-\vec{C})+(\vec{D}-\vec{A})\cdot(\vec{C}-\vec{B})-(\vec{C}-\vec{A})\cdot(\vec{D}-\vec{B})=0.$$

Для этого надо раскрыть скобки и привести подобные члены, как в алгебре (?).

Разумеется, все это верно и для четырех точек, не лежащих в одной плоскости, например для вершин тетраэдра (?).

### Планируем

**23.2** **1** Нарисуйте вектор $\vec{a}$. Как построить: а) такой вектор $\vec{b}$, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$; б) такой вектор $\vec{c}$, что $\vec{a}\cdot\vec{c}=\alpha$ ($\alpha$ — заданное число)?

### Находим величину

**23.3** **1** Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ и $\angle\vec{a}\vec{b}$ равен: а) 60°; б) 135°; в) 90°; г) 0°; д) 180°.

**23.4** **1** Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Вычислите:
а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$;
г) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$; е) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$;
ж) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; з) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM}$; и) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$ (точка $K$ — середина $CD$, точка $M$ — середина $BC$).

**23.5** **1** Дан равносторонний треугольник $ABC$ со стороной 2. Вычислите:
а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; г) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$;
д) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BM}$; ж) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{KM}$ (точка $K$ — середина $BC$, точка $M$ — середина $AC$).

**23.6** **1** Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Точка $K$ — середина $PA$, точка $L$ — середина $BC$, точка $M$ — середина $PB$, а точка $N$ — середина $AC$. Вычислите: а) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$; б) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{MN}$.

**23.7** **1** Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Вычислите: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{CD_1}$; г) $\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{D_1C}$.

**23.8** **2** Чему равно скалярное произведение векторов: а) $(a, 0)$ и $(b, 0)$; б) $(a, 0)$ и $(0, b)$; в) $(a, b)$ и $(a, b)$; г) $(a, b)$ и $(-a, -b)$?

**23.9** **2** Даны векторы $\vec{a}=(1,\ 2)$ и $\vec{b}=(-2,\ 3)$. Вычислите:
а) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}\cdot(-3\vec{b})$; в) $\left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)$; г) $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$;
д) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; е) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; ж) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.

**23.10** **2** Пусть $A(-1,\ 2)$, $B(-2,\ -3)$, $C(1,\ 4)$, $D(4,\ -2)$. Вычислите:
а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; в) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$;
г) $(2\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$.

**23.11** **2** Пусть $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=-\vec{i}-3\vec{j}$. Вычислите проекцию вектора $\vec{a}$ на ось, проходящую через вектор $\vec{b}$. Решите задачу в общем случае.

**23.12** **2** Даны векторы $\vec{a}=(-1,\ 3)$ и $\vec{b}=(2,\ -1)$. Найдите вектор $\vec{c}$, такой, что: а) $|\vec{c}|=1$, $\angle\vec{c}\,\vec{a}=30°$ (какой угол он образует с вектором $\vec{b}$?); б) $\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{b}$ (могут ли эти произведения равняться 1?); в) $\vec{c}\cdot\vec{a}=3$, $\vec{c}\cdot\vec{b}=2$.

**23.13** **3** Преобразуйте выражения: а) $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$;
б) $\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)$; в) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$;
г) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$;
д) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{b})^2\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.

**23.14** **3** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ единичные, $\angle\vec{a}\vec{b}=30°$, $\angle\vec{b}\vec{c}=60°$, $\angle\vec{a}\vec{c}=30°$. Вычислите: а) $(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$; б) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; в) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$; г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

**23.15** **3** Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно неколлинеарны. Чему равен вектор $\vec{x}$, если $\vec{x}\cdot\vec{a}=\vec{x}\cdot\vec{b}=\vec{x}\cdot\vec{c}$?

**23.16** **3** Запишите вектор $\overrightarrow{AO}$ как линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если: а) $AB$ и $AC$ — касательные из точки $A$ к окружности с центром $O$ ($B$ и $C$ — точки касания); б) $AO$ — высота, опущенная из вершины прямого угла $A$ на гипотенузу $BC$ прямоугольного треугольника $ABC$; в) точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.

### Доказываем

**23.17** **1** Докажите, что скалярное произведение единичных векторов равно косинусу угла между ними.

**23.18** **1** Докажите, что $-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Когда достигаются равенства?

**23.19** **2** Докажите, что векторы $(x,\ y)$ и $(-y,\ x)$ перпендикулярны. Какие еще векторы перпендикулярны вектору $(x,\ y)$? Какой из них имеет единичную длину?

**23.20** **2** На векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построен параллелограмм. Пусть вектор $\vec{b}^{\perp}$ такой, что $\vec{b}\cdot\vec{b}^{\perp}=0$, $|\vec{b}^{\perp}|=|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}^{\perp}>0$. Докажите, что площадь параллелограмма равна $\vec{a}\cdot\vec{b}^{\perp}$ (и $\vec{a}^{\perp}\cdot\vec{b}$). Докажите, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(a_1, a_2)$ и $\vec{b}=(b_1, b_2)$, равна $|a_1b_2-a_2b_1|$.

**23.21** **3** Докажите такие равенства:

а) $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$;

б) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$;

в) $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$;

г) $(x\vec{a})\cdot(y\vec{b})=(xy)(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

д) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$;

е) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{c}$.

**23.22** **3** Пусть $\vec{b}\perp\vec{a}$, а вектор $\vec{x}$ любой. Докажите, что $\vec{x}\cdot\vec{a}=(\vec{x}+\vec{b})\cdot\vec{a}$. Проверьте обратное.

**23.23** **3** Среди векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ нет коллинеарных. Докажите, что $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\perp\vec{c}$.

### Исследуем

**23.24** **3** Когда верны равенства:

а) $(-\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}$;

б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(2\vec{b})$; в) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$;

г) $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$; д) $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2$;

е) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}=\vec{a}^2\cdot\vec{b}$; ж) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$?

**23.25** **3** Проверьте такие векторные равенства:

а) $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2\vec{a}^2+2\vec{b}^2$; б) $(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$;

в) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}((\vec{a}+\vec{b})^2-\vec{a}^2-\vec{b}^2)=\frac{1}{2}(\vec{a}^2+\vec{b}^2-(\vec{a}-\vec{b})^2)=\frac{1}{4}((\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2)$;

г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{b}+\vec{c})^2+(\vec{c}+\vec{a})^2-\vec{a}^2-\vec{b}^2-\vec{c}^2$;

д) $\left(\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right)^2=\frac{1}{3}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)-\frac{1}{9}((\vec{a}-\vec{b})^2+(\vec{b}-\vec{c})^2+(\vec{c}-\vec{a})^2)$;

е) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d})^2=(\vec{a}-\vec{c})^2+(\vec{a}-\vec{d})^2+(\vec{b}-\vec{c})^2+(\vec{b}-d)^2-(\vec{a}-\vec{b})^2-(\vec{c}-\vec{d})^2$.

### Рассуждаем

**23.26** **1** Каков знак скалярного произведения векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой? Проверьте обратные утверждения.

**23.27** **3** Пусть $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$. Следует ли отсюда, что $\vec{b}=\vec{c}$?

### Участвуем в олимпиаде

**23.28** Докажите, что ни для каких векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не могут одновременно выполняться три неравенства:
$\sqrt{3}|\vec{a}|<|\vec{b}-\vec{c}|$, $\sqrt{3}|\vec{b}|<|\vec{c}-\vec{a}|$, $\sqrt{3}|\vec{c}|<|\vec{a}-\vec{b}|$.

**23.29** Точки $A$, $B$, $C$, $D$ плоскости таковы, что для любой точки $M$ плоскости скалярные произведения $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ не равны друг другу. Докажите, что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$.

**23.30** Точки $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ на окружности с центром $O$ и радиусом 1 расположены так, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$. Докажите, что для любой точки $B$ справедливо неравенство $|\overrightarrow{BA_1}|+|\overrightarrow{BA_2}|+\ldots+|\overrightarrow{BA_n}|\geqslant n$.

**23.31** Докажите, что из любых пяти векторов можно выбрать два таких, что длина их суммы не превосходит длины суммы трех оставшихся.

# § 24. Векторный метод

## 24.1. Векторная алгебра

Операции с векторами, изученные нами в этой главе, составляют основу векторной алгебры (или векторного исчисления) — раздела математики, изучающего действия с векторами. Аппарат векторной алгебры удобен при решении задач геометрии и физики, техники и экономики. Мы проиллюстрируем его силу на некоторых геометрических задачах. И во всех этих случаях решение проходит три этапа (подобно тому как это происходит при решении текстовых алгебраических задач).

Первый этап: условие задачи надо записать в векторном виде, введя подходящим образом векторы (аналогично тому, как вы составляете алгебраические уравнения, вводя неизвестные величины).

Второй этап: средствами векторной алгебры исходное условие задачи, записанное в векторной форме, преобразуется к виду, который дает решение задачи в векторном виде (аналогия — решение алгебраического уравнения).

И наконец, третий этап: полученным векторным соотношениям дается толкование в исходных терминах (аналогия — формулировка ответа задачи, после того как решено алгебраическое уравнение).

## 24.2. Применение линейных операций с векторами

Линейными называют операции сложения векторов и умножения вектора на число. Иллюстрацию векторного метода мы начнем с известной вам теоремы о средней линии треугольника.

Пусть точки $K$ и $L$ — середины сторон $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ (рис. 44, *а*). В векторной форме условие, что точка $K$ — середина отрезка $AB$, можно записать так: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Аналогично $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Мы записали условие теоремы в векторной форме, т. е. справились с первым этапом ее доказательства.

Приступим ко второму.

По правилам векторной алгебры

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Второй этап завершен: полученное равенство $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ и дает векторное решение задачи.

Перейдем к третьему этапу: дадим истолкование этому равенству. Во-первых, оно утверждает, что $KL \parallel BC$, а во-вторых, что $KL=\frac{1}{2}BC$. Мы справились и с третьим этапом решения. ■

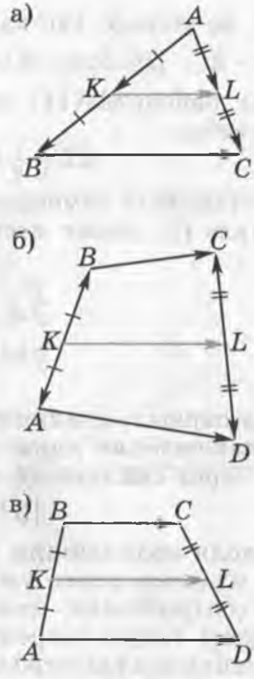



Рис. 44

А теперь векторным методом получим еще один результат.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Пусть точки $K$ и $L$ — середины сторон $AB$ и $CD$ (рис. 44, *б*). Отрезок $KL$ — средняя линия четырехугольника $ABCD$. Тогда $\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KB}$ и $\overrightarrow{LC}=-\overrightarrow{LD}$ (это еще один способ записать в векторной форме, что точки $K$ и $L$ — середины отрезков $AB$ и $CD$).

Из этих равенств получаем, что $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{LD}=\vec{0}$.

Далее, $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL}$ и $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL}$.

Сложив эти равенства, получим, что $2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, т. е.

$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}). \qquad (1)$$

Из последнего равенства для трапеции вытекают такие свойства: *средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.*

Действительно, пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями $AD$ и $BC$ (рис. 44, *в*). Это значит, что $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$ (первый этап). Из равенства (1) следует, что $\overrightarrow{KL}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$ (второй этап). Наконец, третий этап: во-первых, $\overrightarrow{KL}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AD}$, а потому $KL \parallel AD$.

И, во-вторых, так как $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, то $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}| = AD+BC$. Поэтому $KL=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

Из равенства (1) можно получить и такое следствие:

$$KL \leqslant \frac{1}{2}(AD+BC). \qquad (2)$$

Установите самостоятельно, в каком случае в формуле (2) имеет место равенство. ■

## 24.3. Применение скалярного умножения

Во-первых, скалярное умножение применяют для нахождения длин: длина вектора $\vec{a}$ выражается через скалярный квадрат такой формулой:

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}. \qquad (3)$$

Вводя подходящим образом векторы, с помощью их скалярного умножения находят различные соотношения между длинами. Например, докажем такую теорему: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

**Доказательство.** Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Положим $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$. Возводя в скалярный квадрат последние два равенства, получим:

$$\overrightarrow{AC}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2 \text{ и } \overrightarrow{BD}^2=\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2.$$

Сложим полученные равенства и придем к нужному результату:

$$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2. \ ■$$

Во-вторых, с помощью скалярного умножения находят углы между ненулевыми векторами, точнее, их косинусы, по формуле

$$\cos\angle\vec{a}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \qquad (4)$$

В частности, как уже говорилось, равенство нулю скалярного произведения ненулевых векторов означает их перпендикулярность.

Например, *пусть прямая $l$ проходит через точку $A$ и перпендикулярна прямой $BC$* (рис. 45). *Точка $M$ лежит на прямой $l$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.*

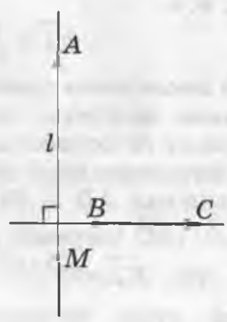


Рис. 45

Это утверждение мы используем сейчас для доказательства следующей теоремы:

**Теорема 29.**

**Все высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке (рис. 46, *а*, *б*).**

**Доказательство.** Пусть дан треугольник $ABC$ и $l_A$, $l_B$, $l_C$ — прямые, содержащие его высоты и проведенные соответственно через вершины $A$, $B$, $C$ (рис. 46, *в*). Точка $M$ лежит на прямой $l_A$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Поскольку $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$, то это равенство равносильно равенству $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$. А оно, в свою очередь, равносильно равенству

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}. \qquad (5)$$

Итак, точка $M$ лежит на прямой $l_A$ тогда и только тогда, когда выполняется (5). Аналогично точка $M$ лежит на прямой $l_B$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA}. \qquad (6)$$

Если же точка $M$ является точкой пересечения прямых $l_A$ и $l_B$, то равенства (5) и (6) выполняются одновременно. Но из (5) и (6) следует

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}. \qquad (7)$$

А (7) означает, что точка $M$ лежит и на прямой $l_C$. Стало быть, все три прямые $l_A$, $l_B$, $l_C$ пересекаются в одной точке. ■

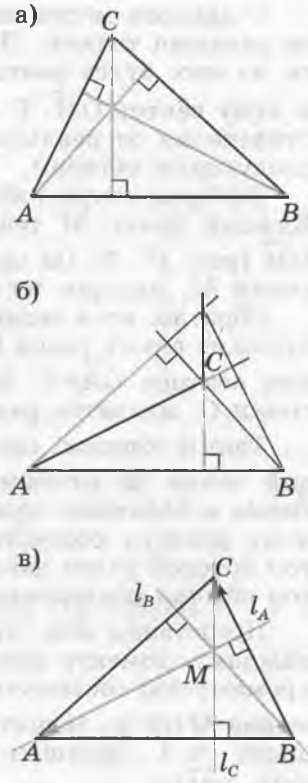



Рис. 46

## 24.4. Радиус-вектор

Следя за удаленным движущимся телом, например за самолетом или спутником, направляют на него луч прожектора или луч радара. От места наблюдения $O$ до тела $M$ как бы протягивается направленный отрезок — вектор $\overrightarrow{OM}$. Он «следит» за перемещением тела: тело движется и соответственно изменяется вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 47, *а*). Считая движущееся тело концом вектора, мы пренебрегаем его размерами и принимаем тело за точку — за материальную точку, как говорят в физике. Это допустимо, если тело достаточно мало в сравнении с расстоянием до него.

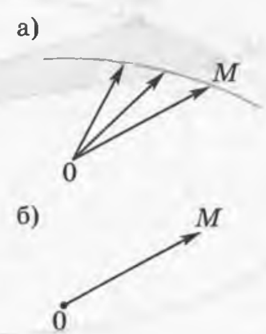



Рис. 47

С данного места наблюдения можно следить за разными телами. Любому положению каждого из них будет соответствовать направленный к нему вектор $\overrightarrow{OM}$. С точки зрения геометрии в отвлечении от реальных тел это представляется следующим образом.

Выберем какую-нибудь точку, обозначим ее $O$. Каждой точке $M$ теперь соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис. 47, *б*). Он называется **радиус-вектором** точки $M$, идущим из точки $O$.

Обратно: если задан какой-либо вектор $\vec{a}$, то, отложив его от точки $O$, получим точку $A$ — конец вектора $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. Вектор $\vec{a}$, отложенный от точки $O$, является радиус-вектором точки $A$.

Таким образом, при выбранной точке $O$ каждой точке $M$ отвечает ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Верно и обратное: при выбранной точке $O$ каждому вектору соответствует точка, радиус-вектор которой равен данному вектору. Радиус-вектор обычно обозначают $\vec{r}$.

Представим себе, что точка движется так, что каждому моменту времени $t$ (из какого-нибудь промежутка) соответствует ее определенное положение $M(t)$, и, значит, радиус-вектор $\overrightarrow{OM}(t)$ зависит от $t$. Запишем это следующим образом: $\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}(t)$.

Так задают движение точки в механике, физике, астрономии. Например, движение планеты вокруг Солнца описывают с помощью радиус-

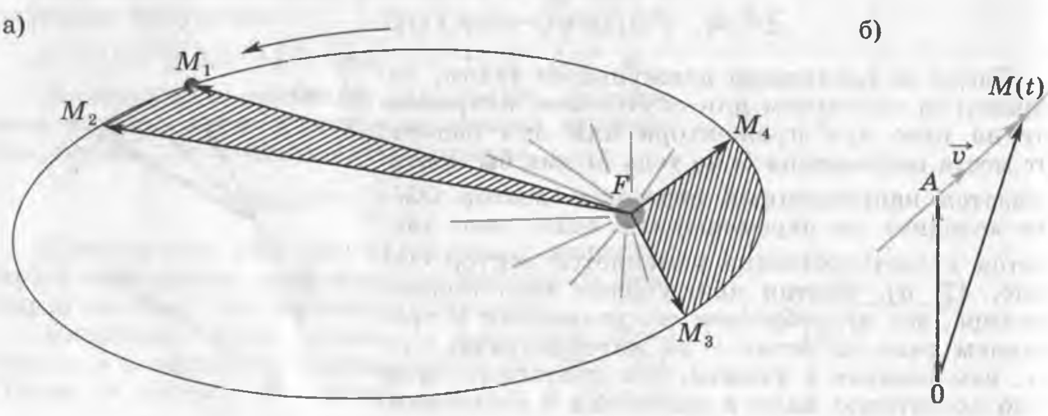



Рис. 48

вектора, проведенного от Солнца к планете — из центра Солнца в центр планеты (рис. 48, *а*). В геометрии изучают произвольные кривые линии, представляя линию как след — траекторию движения точки.

Пусть, например, точка $M$ движется из точки $A$, где она была в момент времени $t_0=0$, с постоянной скоростью $\vec{v}$ (рис. 48, *б*). Тогда ее положение $M(t)$ в момент времени $t$ можно задать радиус-вектором

$$\overrightarrow{OM}(t)=\overrightarrow{OA}+\vec{v}t.$$

Полагая $\overrightarrow{OM}(t)=\vec{r}(t)$ и $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, получим уравнение равномерного прямолинейного движения:

$$\vec{r}(t)=\vec{a}+t\vec{v}. \qquad (8)$$

С помощью радиус-векторов можно задавать и другие движения.

## 24.5. Векторное задание прямой и отрезка

С точки зрения геометрии уравнение (8) представляет собой векторное уравнение прямой $l$, проходящей через точку $A$ в направлении вектора $\vec{v}$. При этом, чтобы точка $M(t)$ «пробежала» всю прямую, переменная $t$ должна принять все действительные значения. Напомним, что $\overrightarrow{AM}(t)=t\vec{v}$.

В уравнении (8) радиус-вектор $\vec{r}(t)$ точки $M(t)$ прямой $l$ выражен через вспомогательное переменное число $t$, которое называется **параметром**. Само же уравнение (8) называют еще **параметрическим уравнением прямой в векторной форме**.

Фраза, что «(8) является параметрическим уравнением прямой», означает, что справедливы два утверждения: 1) для любого значения $t$ точка $M(t)$, радиус-вектор которой $\vec{r}(t)=\vec{a}+t\vec{v}$, лежит на прямой $l$; 2) для любой точки $M^*$ прямой $l$ найдется такое значение параметра $t^*$, что радиус-вектор $\overrightarrow{OM^*}=\vec{a}+t^*\vec{v}$.

Объясните, почему справедливы эти утверждения, используя следствие о векторах на прямой (п. 20.2).

Если же в уравнении (8) параметр $t$ изменяется от некоторого значения $t_1$ до значения $t_2$, то точка $M(t)$ пробегает отрезок с концами в точках $M(t_1)$ и $M(t_2)$ (рис. 49). А как должен изменяться параметр, чтобы точка $M(t)$ пробежала полупрямую с началом $M(t_1)$?

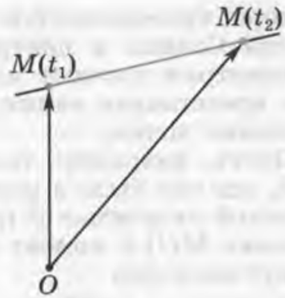


Рис. 49

Чтобы написать уравнение (8) прямой, отрезка или луча, надо задать точку $A$, вектор $\vec{v}$ (он называется **направляющим вектором**) и область изменения параметра $t$. Но чаще приходится писать уравнение прямой, отрезка или луча, зная две их точки. Назовем их $A$ и $B$. Ясно, что тогда в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$. Поскольку $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, то уравнение (8) в этом случае преобразуется к такому виду:

$$\overrightarrow{OM}(t)=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}. \qquad (9)$$

Если $t>0$, то $t=\frac{AM}{AB}$. Поэтому, когда $t$ возрастает от 0 до 1, точка $M$ пробегает отрезок $AB$ от $A$ до $B$. Уравнение (9) будем называть **уравнением отрезка** $AB$, считая при этом, что параметр $t$ изменяется от 0 до 1.

В частности, если точка $C$ — середина отрезка $AB$, то $t=\frac{1}{2}$, так как $AC=\frac{1}{2}AB$.

Из уравнения (9) получаем, что

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}). \qquad (10)$$

Итак, *радиус-вектор середины отрезка равен полусумме радиус-векторов его концов.*

**Замечание.** В этом пункте мы применили аппарат векторной алгебры и понятие радиус-вектора для вывода параметрических уравнений прямой и отрезка. Уже в этих простейших примерах можно заметить важное достоинство применения радиус-вектора: все выводы, которые мы здесь получили, верны как для плоскости, так и для пространства (и даже, как вы узнаете позднее, для пространств любой размерности!). Определения же действий с векторами и свойства этих действий в пространстве такие же, как и на плоскости.

Отметим еще одно достоинство векторных уравнений. Равенство векторов, как было доказано в п. 22.3, равносильно равенству их соответствующих координат. Поэтому если от векторных уравнений перейти к скалярным, т. е. к равенству координат, то на плоскости каждое векторное уравнение заменится двумя скалярными, а в пространстве уже тремя.

## 24.6. Точка пересечения медиан треугольника

В качестве красивого и важного примера приложения векторов докажем следующую теорему:

**Теорема 30.**

**Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке, расстояние от которой до каждой вершины треугольника равно $\frac{2}{3}$ длины соответствующей медианы.**

**Доказательство.** Пусть дан треугольник $ABC$ (рис. 50) и его медианы $AP$ и $BQ$ пересекаются в точке $M$. Введем векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Выразим через них вектор $\overrightarrow{AM}$. Согласно равенству (10) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$. Так как точка $M$ лежит на отрезке $AP$, то $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AP}$, где $\alpha\in[0,\ 1]$. Поэтому

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\alpha}{2}\vec{b}+\frac{\alpha}{2}\vec{c}. \qquad (11)$$

Но точка $M$ лежит и на медиане $BQ$, т. е. $\overrightarrow{BM}=\beta\overrightarrow{BQ}$, где $\beta\in[0,\ 1]$. Так как $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, то

$$\overrightarrow{AM}=\vec{c}+\beta\left(\frac{\vec{b}}{2}-\vec{c}\right)=\frac{\beta}{2}\vec{b}+(1-\beta)\vec{c}. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) получаем, что

$$\frac{\alpha}{2}\vec{b}+\frac{\alpha}{2}\vec{c}=\frac{\beta}{2}\vec{b}+(1-\beta)\vec{c}. \qquad (13)$$

Равенство (13) возможно лишь в том случае, когда коэффициенты справа и слева в этом равенстве при неколлинеарных векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны. В противном случае оказалось бы, что равны неколлинеарные векторы. Поэтому $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}$ и

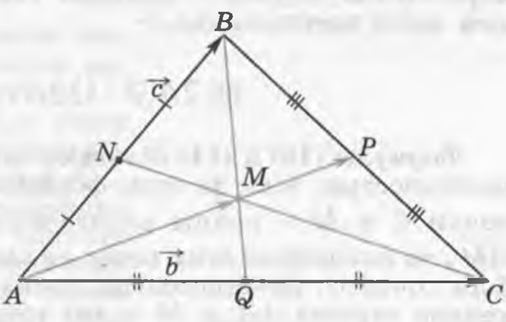


Рис. 50

$\frac{\alpha}{2} = 1-\beta$. Отсюда $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$.

Итак, медиана $BQ$ пересекает медиану $AP$ в точке $M$, удаленной от вершины $A$ на расстояние $\frac{2}{3}AP$. Заменим в предыдущих рассуждениях медиану $BQ$ медианой $CN$. Тогда снова получим, что эти медианы пересекаются в той точке на отрезке $AP$, которая удалена от точки $A$ на расстояние $\frac{2}{3}AP$, т. е. в точке $M$. Итак, все три медианы треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. При этом $AM = \frac{2}{3}AP$, $BM = \frac{2}{3}BQ$, $CM = \frac{2}{3}CN$. ■

**Следствие.**

---

**Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий в точку пересечения $M$ медиан треугольника $ABC$ из произвольной точки $O$, выражается равенством**

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \qquad (14)$$

---

**Доказательство.** Подставив в равенство (11) следующие выражения: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ и $\alpha = \frac{2}{3}$, получим равенство (14). ■

**Замечание.** Точки пересечения высот и медиан треугольника, а также центры вписанной и описанной окружностей треугольника (вспомните, где лежат эти точки) часто называют **замечательными точками треугольника.** Точку пересечения высот называют **ортоцентром**, а точку пересечения медиан — **центром тяжести** (центром масс) треугольника.

## ⊠ 24.7. Центр масс

Формулы (10) и (14) обладают замечательной особенностью: если по этим формулам находить точки $C$ и $M$ — концы радиус-векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$, то положение этих точек не зависит от выбора точки $O$. Действительно, точка $C$ — это середина отрезка $AB$, а $M$ — это точка пересечения медиан треугольника $ABC$.

Эта особенность формул (10) и (14) не случайна: обе они являются частными случаями общей формулы для центра масс системы материальных точек. А середина отрезка и точка пересечения медиан треугольника являются центрами масс отрезка и треугольника.

Рассмотрим общий случай. Пусть задана система $S$ материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_k$, находящихся соответственно в точках $A_1, \ldots, A_k$. Тогда **центром масс этой системы** называется такая точка $P$, радиус-вектор которой выражается равенством

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{OA_k}}{m_1 + \ldots + m_k}. \qquad (15)$$

*Положение этой точки не зависит от выбора точки $O$.*

Действительно, возьмем другую точку $O_1$ и определим по формуле (15) положение центра масс $P_1$ системы $S$. Получим:

$$\overrightarrow{O_1P_1} = \frac{m_1\overrightarrow{O_1A_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{O_1A_k}}{m_1 + \ldots + m_k} = \frac{m_1(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_1}) + \ldots + m_k(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_k})}{m_1 + \ldots + m_k} =$$

$$= \overrightarrow{O_1O} + \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{OA_k}}{m_1 + \ldots + m_k} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O_1P}.$$

Из равенства $\overrightarrow{O_1P_1} = \overrightarrow{O_1P}$ следует, что $P_1 = P$, т. е. положение центра масс не зависит от выбора точки $O$. ■

Если $m_1 = m_2 = \ldots = m_k$, то центр масс $P$ называется **центроидом** точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Если точку $O$ выбрать в центре масс, т. е. положить $O = P$, то, поскольку $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$, из равенства (15) получим равенство

$$m_1\overrightarrow{PA_1} + \ldots + m_k\overrightarrow{PA_k} = \vec{0}. \qquad (16)$$

Оно позволяет дать другое определение центра масс, как такой точки $P$, для которой выполняется равенство (16).

Для системы из двух материальных точек $(A_1, m_1)$ и $(A_2, m_2)$ равенство (16) даст известное вам «правило рычагов» Архимеда: $m_1A_1P = m_2A_2P$.

Будем теперь рассматривать переменные массы $m_1, \ldots, m_k$, суммарно равные единице $(m_1 + \ldots + m_k = 1)$, которые помещены в фиксированные точки $A_1, \ldots, A_k$. Выясним, где может находиться центр масс такой системы. Если $k = 2$, то, положив $m_2 = t$, получаем, что $m_1 = 1 - t$

и приходим к формуле (9): $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA_1}+t\overrightarrow{OA_2}$. Это означает, что, когда $m_2$ возрастает от 0 до 1, центр масс $P$ пробегает весь отрезок $A_1A_2$ от $A_1$ до $A_2$.

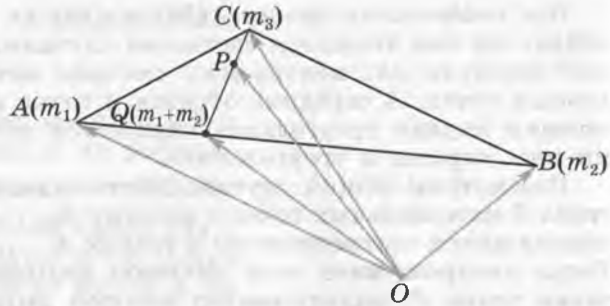


Рис. 51

Для $k=3$ рассмотрим систему из трех материальных точек $(A, m_1)$, $(B, m_2)$ и $(C, m_3)$ в вершинах треугольника $ABC$ с условием, что $m_1+m_2+m_3=1$. Если $m_1=m_2=m_3=\frac{1}{3}$, то центроид этой системы лежит в точке пересечения медиан треугольника $ABC$ (формула (14)). В общем же случае центр масс $P$ этой системы можно найти так.

Сначала найдем центр масс $Q$ пары материальных точек $(A, m_1)$ и $(B, m_2)$ (рис. 51). Ее радиус-вектор $\overrightarrow{OQ}=\frac{m_1\overrightarrow{OA}+m_2\overrightarrow{OB}}{m_1+m_2}$. Если теперь найти центр масс двухточечной системы $(Q, m_1+m_2)$ и $(C, m_3)$, то и получим точку $P$. Действительно,

$$(m_1+m_2)\overrightarrow{OQ}+m_3\overrightarrow{OC}=m_1\overrightarrow{OA}+m_2\overrightarrow{OB}+m_3\overrightarrow{OC}=OP.$$

Итак, каждой тройке неотрицательных чисел $(m_1, m_2, m_3)$, сумма которых равна единице, соответствует точка треугольника $ABC$ — центр масс системы материальных точек $(A, m_1)$, $(B, m_2)$ и $(C, m_3)$. Убедитесь, что верно и обратное утверждение: для каждой точки $\triangle ABC$ найдется такая тройка неотрицательных чисел.

Поэтому тройка неотрицательных чисел $(m_1, m_2, m_3)$, сумма которых равна единице, называется **барицентрическими координатами** точки $P$ треугольника $ABC$, радиус-вектор которой выражается равенством

$$\overrightarrow{OP}=m_1\overrightarrow{OA}+m_2\overrightarrow{OB}+m_3\overrightarrow{OC}. \qquad (17)$$

Продолжите эти рассуждения для $k>3$.

## Вопросы

1. В чем состоит векторный метод решения задач?
2. Как задать в векторной форме: а) прямую; б) отрезок?
3. Какие замечательные точки в треугольнике вы знаете?

## Задачи к § 24

### Разбираемся в решении

**24.1** **3** Как, используя скалярное произведение, найти в данном треугольнике длину медианы? биссектрисы?

**Решение.** Пусть в треугольнике $ABC$, стороны которого известны, проведена медиана $AA_1$. Основным для нахождения длин отрезков векторным методом является равенство $|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$, откуда следует $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

В нашей задаче для нахождения $AA_1$ запишем: $AA_1=|\overrightarrow{AA_1}|=$ $=\sqrt{\overrightarrow{AA_1}^2}$.

Задача будет решена, если нам удастся выразить через стороны треугольника $\overrightarrow{AA_1}^2$.

Так как точка $A_1$ является серединой отрезка $BC$, то $\overrightarrow{AA_1}=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

Скалярный квадрат $\overrightarrow{AA_1}$ получается возведением обеих частей этого равенства в квадрат: $\overrightarrow{AA_1}^2=\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right)^2$.

Раскрыв скобки и упростив записи, получим

$$\overrightarrow{AA_1}^2=\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right)^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=$$
$$=\frac{1}{4}(AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(c^2+b^2+2cb\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2cb}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(c^2+b^2+b^2+c^2-a^2)=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2).$$

Тогда $AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

Такой подход к вычислению длин отрезков является типичным для векторного метода.

И — обратите внимание — мы опять обошлись без рисунка!

### Дополняем теорию

**24.2** **4** Пусть точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $p:q$, считая от точки $A$. Докажите, что $\overrightarrow{OC}=\frac{q}{p+q}\overrightarrow{OA}+\frac{q}{p+q}\overrightarrow{OB}$. ($O$ — любая точка.)

**24.3** **7** Пусть даны материальные точки $(A_1,\ m_1)$ и $(A_2,\ m_2)$, ..., $(A_k,\ m_k)$. **Моментом инерции** системы этих точек относительно некоторой точки $X$ назовем величину $I_X=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i\cdot XA_i^2$, т. е. $I_X=m_1XA_1^2+$ $+m_2XA_2^2+\ldots+m_kXA_k^2$. Чему равен момент инерции: а) вершин равностороннего треугольника относительно какой-либо вершины; середины какой-либо стороны; центра; б) вершин квадрата относительно какой-либо вершины; середины стороны; центра? (В вершинах этих фигур находятся единичные массы.)

**24.4** **7** Пусть $T_1$ — центроид системы точек $A_1, \ldots, A_k$, $T_2$ — центроид системы точек $B_1, \ldots, B_l$, $T_3$ — центроид системы точек $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l$. Докажите, что $T_3 \in T_1T_2$. В каком отношении $T_3$ делит отрезок $T_1T_2$? Какие следствия вы можете получить из этого?

### Планируем

**24.5** **3** Как, используя скалярное произведение, найти в данном треугольнике угол между: а) двумя медианами; б) медианой и биссектрисой?

**24.5** **3** В четырехугольнике известны длины двух противоположных сторон и угол между ними. Как найти длину средней линии, соединяющей середины двух других его сторон?

### Находим величину

**24.7** **5,6** В треугольнике $ABC$ проведены хорды $BK$ и $AL$. При этом $AK = \frac{1}{3}AC$, $BL = \frac{1}{3}BC$. В каком отношении делятся отрезки $AL$ и $BK$ точкой $P$ их пересечения? Лежит ли точка $P$ на медиане к стороне $AB$? Обобщите.

**24.8** **5,6** Пусть точка $K$ лежит на стороне $BA$ треугольника $ABC$, причем $BK = \frac{1}{3}BA$, а точка $L$ лежит на стороне $BC$, причем $BL = \frac{1}{2}BC$. Пусть прямая $KL$ пересекает прямую $AC$ в точке $M$. а) В каком отношении делится точкой $C$ отрезок $AM$? Обобщите полученный результат. б) В каком отношении делит прямая $KL$ медиану $BB_1$? Обобщите задачу.

**24.9** **5,6** Вершина параллелограмма соединена отрезками с серединами противоположных сторон. В каком отношении эти отрезки делят диагональ, не проходящую через данную вершину? Как можно обобщить эту задачу?

**24.10** **5,6** Пусть $T_1$ — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, а точка $T_2$ — точка пересечения медиан треугольника $A_2B_2C_2$. Выразите $\overrightarrow{T_1T_2}$ через $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$.

**24.11** **7** Укажите положение центра масс материальных точек: а) $(A_1, 1)$ и $(A_2, 3)$; б) $\left(A_1, \frac{2}{5}\right)$ и $\left(A_2, \frac{4}{5}\right)$; в) $(A_1, 10)$ и $(A_2, 10)$.

**24.12** **7** Укажите положение центра масс материальных точек: а) $(A_1, 1)$, $(A_2, 2)$, $(A_3, 3)$; б) $(A_1, 5)$, $(A_2, 5)$, $(A_3, 5)$; в) $\left(A_1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(A_2, \frac{1}{3}\right)$, $\left(A_3, \frac{1}{4}\right)$; г) $\left(A_1, \frac{2}{7}\right)$, $\left(A_2, \frac{1}{7}\right)$, $\left(A_3, \frac{4}{7}\right)$; д) $\left(A_1, \frac{1}{3}\right)$, $\left(A_2, \frac{1}{3}\right)$, $\left(A_3, \frac{1}{3}\right)$.

**24.13** **7** Пусть точка $O$ — центр правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$, точка $X$ любая, $XO=d$, $OA_i=R$. Найдите величину $\sum\limits_{i=1}^{n} XA_i^2$.

**24.14** **7** Даны два правильных многоугольника $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_k$. Расстояние между их центрами $d$, радиусы описанных около них окружностей $R_1$ и $R_2$. Все вершины одного многоугольника соединены отрезками со всеми вершинами другого, и наоборот. Чему равна сумма квадратов длин всех этих отрезков?

## Доказываем

**24.15** **2** На отрезке $AB$ построены параллелограммы $ABCD$ и $ABKL$. Докажите, что четырехугольник $CDLK$ является параллелограммом. Будет ли это верно для параллелограммов в пространстве?

**24.16** **2** В параллелограмме $ABCD$ проведены две параллельные хорды $AK$ и $CL$ ($K \in BC$, $L \in DA$). Докажите, что хорды $DK$ и $BL$ также параллельны.

**24.17** **2** Дана трапеция $ABCD$. Точки $K$ и $L$ лежат на боковых сторонах $AB$ и $CD$. Пусть $BK:BA=CL:CD$. Докажите, что $KL \parallel AD$. Проверьте обратное.

**24.18** **3** Докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.

**24.19** **3** Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

**24.20** **3** На двух противоположных сторонах квадрата как на гипотенузах построены два равных прямоугольных треугольника — во внешнюю сторону и так, что прямая, соединяющая вершины их прямых углов, не параллельна стороне квадрата. Докажите, что эта прямая делит пополам эти прямые углы.

**24.21** **4** Дан произвольный четырехугольник. а) Докажите, что середины его средних линий совпадают. б) Обобщите утверждение «а» на пространство.

**24.22** **4** Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Обобщите это утверждение.

**24.23** **4** Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ — четыре любые точки. Известно, что $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ (см. задачу 23.1). Используйте это соотношение для доказательства существования точки пересечения высот треугольника или их продолжений.

**24.24** **5,6** Дан треугольник. Докажите, что его медиана делит пополам любую хорду треугольника, параллельную стороне треугольника, к которой проведена медиана. Обобщите это утверждение. Проверьте обратное.

**24.25** **5,6** Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

**24.26** **5,6** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $BB_1$. Внутри ее взята точка $K$ и через нее проведены хорды $AA_1$ и $CC_1$. Докажите, что $A_1C_1 \parallel AC$. Проверьте обратное.

**24.27** **5,6** Докажите, что точка пересечения средних линий четырехугольника лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей. Каким будет обобщение этого результата в пространстве?

**24.28** **5,6** В четырехугольнике $ABCD$ точка $M$ лежит на $AB$, точка $N$ лежит на $CD$, причем $AM:AB = DN:DC$. а) Докажите, что середины отрезков $BC$, $AD$, $MN$ лежат на одной прямой. б) Докажите, что хорда $MN$ делит полученную среднюю линию в том же отношении, что и стороны.

Как можно обобщить полученные результаты?

**24.29** **5,6** Из точки $O$ выходят лучи $a$, $b$, $c$. На луче $a$ взяты точки $A_1$ и $A_2$, на луче $b$ — точки $B_1$ и $B_2$, на луче $c$ — точки $C_1$ и $C_2$. Пусть прямые $A_1B_1$ и $A_2B_2$ пересекаются в точке $K$, прямые $B_1C_1$ и $B_2C_2$ пересекаются в точке $L$, прямые $C_1A_1$ и $C_2A_2$ пересекаются в точке $M$. Докажите, что точки $K$, $L$, $M$ лежат на одной прямой. Верен ли этот результат в пространстве?

**24.30** **5,6** Пусть точка $T$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$, а точка $O$ произвольная. Докажите, что

$$OT < \frac{1}{3}(OA + OB + OC).$$

**24.31** **5,6** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята точка $C_1$, на стороне $BC$ — точка $A_1$, на стороне $CA$ — точка $B_1$. При этом $AC_1:AB = BA_1:BC = CB_1:CA$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника $ABC$. Проверьте обратное.

**24.32** **5,6** Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник. Точка $T_1$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$, точка $T_2$ — точка пересечения медиан треугольника $BCD$, точка $T_3$ — точка пересечения медиан треугольника $CDA$, точка $T_4$ — точка пересечения медиан треугольника $DAB$. Докажите, что точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ и точка пересечения средних линий четырехугольника $T_1T_2T_3T_4$ совпадают.

**24.33** **5,6** Пусть теперь $ABCD$ — тетраэдр. Сохранив условия предыдущей задачи, докажите, что отрезки $AT_2$, $BT_3$, $CT_4$, $DT_1$ имеют общую точку и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершины.

**24.34** **7** Все материальные точки лежат на некоторой прямой. Докажите, что их центр масс лежит на той же прямой. Обобщите это утверждение на плоскость.

**24.35** **7** Пусть точка $T$ — центр масс трех материальных точек $A_1$, $A_2$ и $A_3$. Пусть точка $T_1$ — центр масс материальных точек $A_2$ и $A_3$, точка $T_2$ — центр масс материальных точек $A_1$ и $A_3$, точка $T_3$ — центр масс материальных точек $A_1$ и $A_2$. а) Пусть в точке $T_1$ помещена масса точек $A_2$ и $A_3$. Докажите, что теперь центр масс точек $T_1$ и $A_1$ совпадает с исходным центром масс. б) Докажите, что прямая $A_2T$ пересекает отрезок $A_1A_3$ в центре масс точек $A_1$ и $A_3$.

в) Докажите, что прямые $A_1T_1$ и $A_3T_3$ пересекаются в точке $T$. (В задачах «б» и «в» точки $A_1$, $A_2$, $A_3$ не лежат на одной прямой.) Обобщите задачу.

**24.36** **7** Три материальные точки лежат в вершинах треугольника. Докажите, что их центр масс лежит внутри треугольника.

**24.37** **7** а) Используя понятие центра масс, докажите, что: 1) медианы треугольника имеют общую точку; 2) точка пересечения средних линий четырехугольника и середина отрезка, соединяющего середины его диагоналей, совпадают. б) Среди задач этого параграфа есть такие, которые решаются с использованием понятия центра масс. Найдите сами хотя бы одну такую.

**24.38** **7** Пусть точка $T$ — центр масс системы материальных точек $(A_1, m_1)$, $(A_2, m_2)$, $(A_3, m_3)$, точка $X$ — произвольная точка плоскости, $I_X$ — момент инерции системы относительно точки $X$, а $I_T$ — момент инерции системы относительно точки $T$. Докажите, что

$$I_X = I_T + (m_1 + m_2 + m_3)XT^2.$$

Обобщите это равенство на произвольное число точек. Какие следствия из этой формулы вы сможете получить?

**24.39** **7** Пусть точка $T$ — центроид системы точек $A_1, \ldots, A_n$, $X$ — любая точка. Докажите, что $XT \leqslant \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} XA_i$.

**24.40** **7** Пусть точка $T_1$ — центроид системы точек $A_1, \ldots, A_n$, точка $T_2$ — центроид системы точек $B_1, \ldots, B_n$. Докажите, что:

а) $\overrightarrow{T_1T_2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iB_i}$; б) $T_1T_2 \leqslant \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} A_iB_i$.

Какие результаты из предыдущих задач можно отсюда получить?

**24.41** **7** Пусть точка $T$ — центроид системы точек $A_1, \ldots, A_n$, а точка $X$ любая. Докажите, что $XT^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} XA_i^2 - \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i<j} A_iA_j^2$.

**24.42** **7** Докажите, что центр правильного многоугольника является его центроидом.

### Исследуем

**24.43** **2** Дан треугольник $ABC$. Пусть точка $K$ лежит на $AB$, а точка $L$ лежит на $AC$. Пусть $AK : AB = AL : AC$. Докажите, что $KL \parallel BC$. Вычислите $KL : BC$.

Проверьте обратные утверждения. Изменятся ли полученные результаты, если точки $K$ и $L$ взяты на продолжениях сторон за точки $B$ и $C$? за точку $A$?

**24.44** **2** Проведены две хорды полосы, концы которых лежат на ее краях. Докажите, что прямая, проходящая через их середины, параллельна краям полосы. Обобщите задачу. Проверьте обратное.

**24.45** **3** а) В треугольнике $ABC$ известны $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. Можно ли найти $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$? б) В треугольнике $ABC$ $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ — медианы. Пусть известны $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AA_1}$. Можно ли найти $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CC_1}$?

**24.46** **3** Попытайтесь установить связь между длинами диагоналей трапеции и длинами ее сторон.

**24.47** **3** На сторонах треугольника $ABC$ отложены единичные векторы: $\overrightarrow{AA_1}$ на $AB$, $\overrightarrow{BB_1}$ на $BC$, $\overrightarrow{CC_1}$ на $CA$. Возведите в квадрат сумму $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}$. Ее квадрат неотрицателен. Используя это, получите соотношение между косинусами углов треугольника.

**24.48** **3** Внутри треугольника взята точка. Каждая сторона треугольника видна из нее под некоторым углом. Ясно, что хотя бы один из них не больше чем 120°. Какой будет аналогичная оценка углов, если точка берется внутри тетраэдра?

**24.49** **4** Из точки $O$ выходят два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OX}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. а) Какую фигуру образуют все точки $X$, такие, что: 1) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$; 2) $\alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$; 3) $\alpha = 1$, $\beta \in R$; 4) $\alpha \geqslant 0$, $\beta = -1$; 5) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta = 2$?

б) Какие ограничения нужно наложить на числа $\alpha$ и $\beta$, чтобы переменная точка $X$ заполнила: 1) треугольник $AOB$; 2) параллелограмм; 3) полосу?

**24.50** **4** Какую фигуру образуют концы всевозможных радиус-векторов вида $\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}$, где: а) точка $X$ фиксирована, а точка $Y$ лежит на отрезке $AB$; б) точка $X$ лежит на одном из данных отрезков, а точка $Y$ лежит на другом; в) точка $X$ лежит в одном из данных треугольников, а точка $Y$ — в другом?

**24.51** **4** Пусть $PQ$ — средняя линия четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $PQ \leqslant \frac{1}{2}(AD+BC)$ $(P \in AB,\ Q \in CD)$. В каком четырехугольнике выполняется равенство? Верно ли это неравенство для пространственной ломаной?

**24.52** **4** Пусть $AB$ и $CD$ — два отрезка, точка $K$ делит отрезок $AB$ в отношении $p:q$, считая от точки $A$, а точка $L$ делит отрезок $CD$ в том же отношении, считая от точки $C$.

Выразите $\overrightarrow{KL}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Будет ли верно это соотношение, если данные отрезки не лежат в одной плоскости? Проверьте обратное утверждение. Рассмотрите частный случай, когда один из отрезков вырождается в точку.

**24.53** **4** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята точка $C_1$, на стороне $BC$ — точка $A_1$, на стороне $CA$ — точка $B_1$. а) Пусть $AC_1:AB=BA_1:BC=$ $=CB_1:CA=\alpha$. Докажите, что из отрезков $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ можно составить треугольник. Проверьте обратное. б) Пусть $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ — биссектрисы соответствующих углов треугольника $ABC$, и из них можно составить треугольник. В каком треугольнике это возможно? в) Составьте задачи, аналогичные задаче «б».

**24.54** **4** Построить треугольник, зная середины его сторон, несложно. (Как?) А сможете ли вы решить такую задачу для пятиугольника? А для четырехугольника? Обобщите полученные результаты.

**24.55** **4** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что: а) его диагонали перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AB^2+CD^2=4R^2$, где $R$ — радиус окружности; б) середины двух противоположных сторон такого четырехугольника, точка пересечения его диагоналей и центр данной окружности являются вершинами параллелограмма.

**24.56** **5,6** Какой вид имеет четырехугольник, в котором точка пересечения средних линий совпадает с точкой пересечения диагоналей?

**24.57** **5,6** Пусть известны расстояния от точки пересечения медиан треугольника до его вершин и расстояния от некоторой точки плоскости до его вершин. Достаточно ли этого, чтобы найти расстояние от взятой точки до точки пересечения медиан треугольника? Какой будет формула для вычисления такого расстояния? Используя эту формулу, найдите внутри треугольника такую точку, что сумма квадратов расстояний от нее до вершин треугольника имеет наименьшее значение.

**24.58** **7** Используя условия и результат задачи 24.3, выразите момент инерции $I_T$ через расстояния между данными точками. Обобщите результат. Какие следствия из этой формулы вы сможете получить?

## Рассуждаем

**24.59** **1** Запишите в векторном виде: а) точки $A$ и $B$ совпадают; б) прямые $AB$ и $CD$ параллельны; в) точка $X$ лежит на прямой $AB$; г) точка $X$ лежит на отрезке $AB$; д) три точки $M$, $N$, $P$ лежат на одной прямой; е) три точки $A$, $B$, $C$ являются вершинами треугольника; ж) точка $C$ — середина отрезка $AB$; з) точка $K$ лежит на отрезке $AB$ и делит его в отношении $p:q$.

**24.60** **1** Используя скалярное произведение, запишите в векторном виде: а) точки $A$ и $B$ совпадают; б) прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны; в) $\angle ABC > 90°$, $\angle MKP < 90°$, г) точка $X$ лежит на прямой $AB$.

**24.61** **1** Каков геометрический смысл векторных соотношений: а) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{ST}$; в) $\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MK}$; д) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{0}$; з) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{CD}|$?

**24.62** **1** Каков геометрический смысл векторных соотношений: а) $\overrightarrow{AB}^2=0$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$; в) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|$; г) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|$; д) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|$?

## Участвуем в олимпиаде

**24.63** Докажите, что если четырехугольники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ — параллелограммы, то и четырехугольник $ABTE$ — параллелограмм (вершины всех четырехугольников перечислены против часовой стрелки).

# § 25. Метод координат

## 25.1. Понятие об уравнении фигуры

Характерное свойство фигуры (множества точек) определяет, какие точки принадлежат фигуре и какие не принадлежат. Если на плоскости ввести систему координат, то каждая точка фигуры определится своими координатами. А тогда характерное свойство фигуры можно выразить в виде аналитического соотношения (уравнения или неравенства), которому должны удовлетворять координаты точек фигуры.

Возьмем, например, прямую $l$. Введем систему координат так, чтобы $l$ стала осью $x$ (рис. 52, *а*). Тогда условие, что точка принадлежит прямой $l$, выразится так: ордината этой точки равна нулю. Подробнее: 1) если точка $A_1(x_1, y_1) \in l$, то $y_1=0$ и 2) если у точки $A_2(x_2, y_2)$ ее координата $y_2=0$, то $A_2 \in l$.

Короче, точка $M(x, y) \in l$ тогда и только тогда, когда $y=0$. Уравнение $y=0$ и есть уравнение прямой $l$ в выбранной системе координат.

В общем же случае говорят, что **фигура $F$ задается данным уравнением в прямоугольных координатах, если точка принадлежит фигуре $F$ тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному уравнению.** Это означает, что выполняются два условия:

1) *если точка принадлежит фигуре $F$, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению;*

2) *если числа $x$, $y$ удовлетворяют данному уравнению, то точка с такими координатами принадлежит фигуре $F$.* Второе условие можно выразить иначе: *координаты любой точки, не принадлежащей фигуре $F$, не удовлетворяют данному уравнению.*

Например, прямая, перпендикулярная оси $x$ и проходящая через точку $M(x_0, 0)$ на оси $x$, задается уравнением $x=x_0$ (рис. 52, *б*). (В частности, ось $y$ имеет уравнение $x=0$.) Действительно, каждая точка, лежащая на этой прямой, имеет одну и ту же координату $x=x_0$. А любая точка, не лежащая на этой прямой, имеет другое значение координаты $x$, нежели $x_0$.

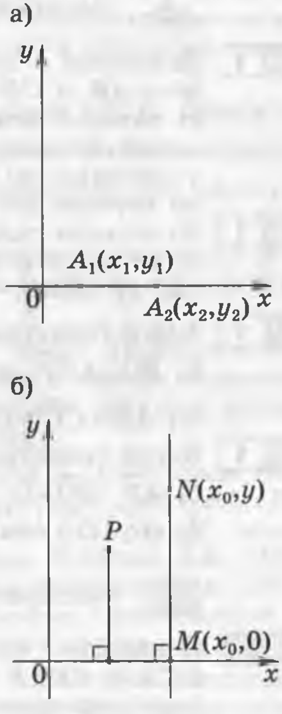



Рис. 52

## 25.2. Уравнение окружности

Это уравнение мы выведем, используя формулу расстояния между точками (п. 22.6). Пусть на плоскости введены прямоугольные координаты. Рассмотрим окружность радиусом $r$ с центром в точке $C(a, b)$. Если точка $M(x, y)$ принадлежит окружности, то ее расстояние от центра равно $r$, т. е. $MC = r$ (рис. 53). Это же равенство удобнее записать так: $MC^2 = r^2$. Выразив расстояние $MC$ через координаты точек $M$ и $C$, получим:

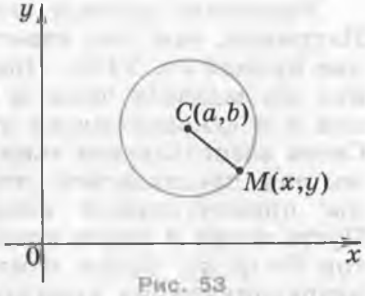



Рис. 53

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Если же точка $M(x, y)$ не принадлежит этой окружности, то $MC \neq r$ и ее координаты не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, (1) — это уравнение окружности. ■

Если центр окружности лежит в начале координат, то $a = b = 0$. Тогда уравнение (1) имеет совсем простой вид: $x^2 + y^2 = r^2$.

## 25.3. Задание фигур неравенствами

Фигуры на плоскости задаются не только уравнениями, но и неравенствами. Например, на оси $x$ неравенство $x \geqslant a$ задает луч, а неравенства $b \leqslant x \leqslant c$ — отрезок (рис. 54, *а*).

Говорят, что *фигура задается данным неравенством в прямоугольных координатах, если точка принадлежит фигуре тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному неравенству*. Например, неравенством $y \geqslant 0$ задается верхняя полуплоскость, ограниченная осью $x$ (рис. 54, *б*), а неравенством $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ задается круг с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом $r$ (рис. 54, *в*).

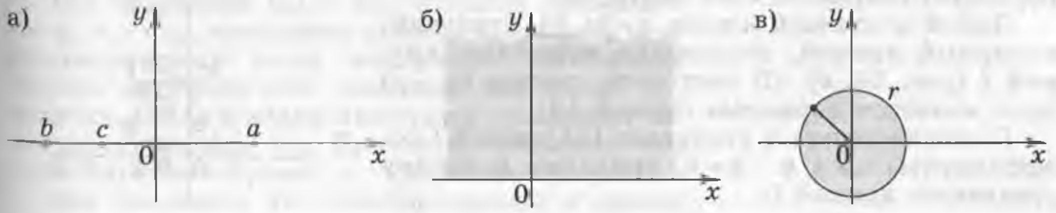



Рис. 54

## 25.4. Уравнение прямой

Уравнение прямой записывают по-разному. Например, вам уже известно векторное уравнение прямой (п. 24.5). При выводе этого уравнения мы задавали прямую $l$ какой-нибудь ее точкой $A$ и направляющим ненулевым вектором $\vec{v}$. Снова воспользуемся таким заданием, но теперь мы еще предполагаем, что на плоскости введены прямоугольные координаты (рис. 55, *а*). Пусть точка $A$ имеет координаты $(x_0, y_0)$, а вектор $\vec{v}=(p, q)$. Будем считать, что прямая $l$ не перпендикулярна координатным осям. В этом случае $p \neq 0$ и $q \neq 0$.

Напомним, что точка $M(x, y) \in l$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{v}$ коллинеарны (п. 20.2). А это, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда координаты векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{v}$ пропорциональны. Поскольку $\overrightarrow{AM}=(x-x_0, y-y_0)$, то эта пропорциональность выражается так:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}. \qquad (2)$$

Итак, мы установили, что точка $M(x, y) \in l$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (2). Поэтому уравнение (2) является уравнением прямой $l$, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{v}=(p, q)$. Часто это уравнение называют **каноническим уравнением прямой** («канон» по-гречески означает «правило»). ■

Уравнение (2) преобразуем к такому виду:

$$q(x-x_0)-p(y-y_0)=0. \qquad (3)$$

Левая часть уравнения (3) является скалярным произведением вектора $\overrightarrow{AM}=(x-x_0, y-y_0)$, и вектора $(q, -p)$. Само же уравнение (3) выражает перпендикулярность этих векторов.

Любой ненулевой вектор $\vec{n}=(a, b)$, перпендикулярный прямой, называется **нормалью прямой** $l$ (рис. 55, *б*). (В частности, вектор $(q, -p)$ тоже является нормалью прямой $l$.)

Положив теперь в уравнение (3) прямой $l$ коэффициенты $q=a$ и $-p=b$, приходим к такому уравнению прямой $l$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0. \qquad (4)$$

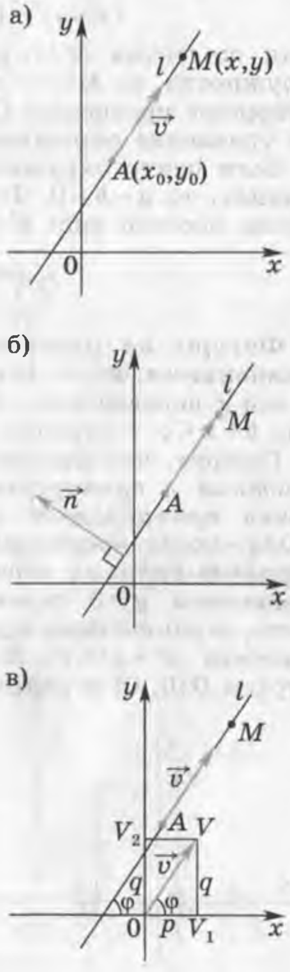



Рис. 55

Если уравнение (2) выражало коллинеарность векторов $\overrightarrow{AM}=(x-x_0,\ y-y_0)$ и $\vec{v}=(p,\ q)$, то полученное из него уравнение (4) выражает перпендикулярность векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{n}=(a,\ b)$.

**Замечание.** Уравнение (4) можно вывести и так: точка $M(x,\ y)\in l$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$, т. е. тогда и только тогда, когда координаты точки $M(x,\ y)$ удовлетворяют уравнению (4). ■

Если в (4) раскрыть скобки и положить $c=-ax_0-by_0$, то мы получим еще один вид уравнения прямой:

$$ax+by+c=0. \qquad (5)$$

Такое уравнение называется **общим уравнением прямой.**

Наконец, если выразить $y$ из (5) и положить $k=-\frac{a}{b}$ и $d=-\frac{c}{b}$, то придем к известной вам линейной функции

$$y=kx+d. \qquad (6)$$

Число $k=-\frac{a}{b}=\frac{q}{p}$ называется **угловым коэффициентом прямой** $l$. Оно равно тангенсу угла $\varphi$ между положительной полуосью $x$ и лучом прямой $l$, лежащим в полуплоскости $y\geqslant 0$ (рис. 55, *в*).

Действительно, величина $k=\frac{q}{p}$ равна отношению проекций направляющего вектора $\vec{v}$ на оси $y$ и $x$. Считаем, что $q>0$ (в противном случае можно заменить вектор $\vec{v}=(p,\ q)$ на вектор $-\vec{v}=(-p,\ -q)$). Отложим вектор $\vec{v}$ от точки $O$: $\overrightarrow{OV}=\vec{v}$ (см. рис. 55, *в*). Разложим $\overrightarrow{OV}$ по осям координат: $\overrightarrow{OV}=\overrightarrow{OV_1}+\overrightarrow{OV_2}=p\vec{i}+q\vec{j}$. Теперь равенство $\operatorname{tg}\varphi=\frac{q}{p}$ становится очевидным из рассмотрения прямоугольного треугольника $OVV_1$. Итак, $k=\operatorname{tg}\varphi$. ■

Все уравнения (2) — (6), а также уравнения $x=x_0$ и $y=y_0$, которыми задаются прямые, перпендикулярные осям координат, **линейные.** Только записаны эти линейные уравнения по-разному. Общим видом линейного уравнения является уравнение (5). При этом считается, что хотя бы одно из чисел $a$, $b$ отлично от нуля.

Мы доказали, что *каждая прямая в прямоугольной системе координат задается линей-*

*ным уравнением.* Верно также и обратное утверждение.

**Теорема 31** *(о линейном уравнении).*

**Каждое линейное уравнение в прямоугольных координатах задает на плоскости прямую.**

**Замечание.** Из этой теоремы, в частности, следует, что графиком линейной функции является прямая. Это утверждение известно вам из алгебры, но там оно не доказывалось.

**Доказательство.** Пусть на плоскости введены прямоугольные координаты $x$, $y$ и задано линейное уравнение (5). Покажем, что (5) задает на плоскости прямую.

Если $b=0$, то $a\neq 0$ и уравнение (5) можно записать так: $x=-\frac{c}{a}$. Как мы знаем, такое уравнение задает прямую, перпендикулярную оси $x$.

Если же $b\neq 0$, то уравнение (5) можно записать в виде (6), где $k=-\frac{a}{b}$ и $d=-\frac{c}{b}$. Построим прямую с направляющим вектором $\vec{v}=(-b, a)$ и проходящую через точку $(0, d)$. Как доказано, эта прямая задается уравнением (6), а значит, и уравнением (5). ■

**Замечание.** Каждое линейное уравнение задает вполне определенную прямую на плоскости. Но каждая данная прямая задается разными уравнениями, как мы уже убедились. Кроме того, заметим, что и векторное уравнение прямой является линейным относительно параметра.

## 25.5. Метод координат

Применяя метод координат, можно решать задачи двух видов.

1) Задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах геометрические соотношения, мы применяем алгебру к геометрии. Так мы поступали, когда выражали через координаты основную геометрическую величину — расстояние между точками (п. 22.6), а затем когда выводили уравнения окружности и прямой.

2) Пользуясь координатами, можно истолковывать уравнения и неравенства геометрически и таким образом применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функ-

ций — первый пример такого применения метода координат. Другой пример — только что доказанная теорема 31 о линейном уравнении.

Через метод координат геометрия и алгебра, соединяясь и взаимодействуя, дают богатые плоды, которые они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

Если известны уравнения фигур, можно изучать их взаимное расположение, решая системы соответствующих уравнений. Так, например, дайте классификацию взаимного расположения двух окружностей, рассмотрев систему из их уравнений (рис. 56, *а*). (Конечно, эту классификацию можно дать и без метода координат.)

Применение метода координат в соединении с алгеброй составляет раздел геометрии, называемый **аналитической геометрией.** Аналитическая геометрия была создана в первой половине XVII в. в работах знаменитых французских ученых Рене Декарта (1596—1650) и Пьера Ферма (1601—1665).

Пьер Ферма

Обе возможности метода координат мы покажем на задаче, решенной еще знаменитым древнегреческим геометром Аполлонием Пергским (ок. 260 — ок. 170 гг. до н. э.). Методом координат она решается гораздо проще, чем чисто геометрическим методом (как, разумеется, и решал Аполлоний).

## 25.6. Окружность Аполлония

**Задача.** *Что представляет собой множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная?*

**Решение.** Итак, пусть даны две точки $A$ и $B$ и некоторое положительное число $k$, равное отношению расстояний. Если $k=1$, то множество точек $M$, для которых $\frac{MA}{MB}=1$, т. е. $MA=MB$, является, как мы знаем, прямой — серединным перпендикуляром отрезка $AB$.

Рассмотрим теперь случай, когда $k\neq 1$. Пусть, например, $k=2$. Решение задачи состоит из двух этапов.

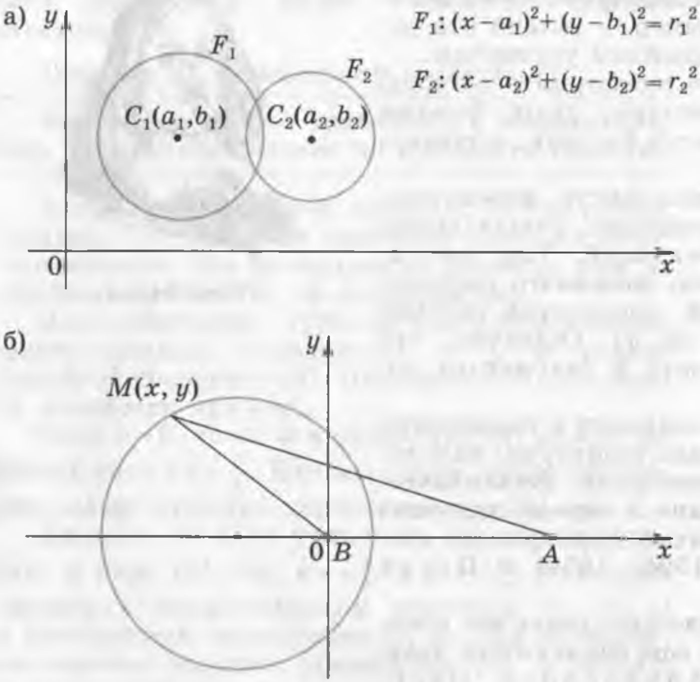



Рис. 56

1. *Вывод уравнения фигуры* (множества точек). Введем систему прямоугольных координат. Удобно ее начало выбрать в одной из данных точек, например в точке $B$. В качестве положительной полуоси оси $x$ возьмем луч $BA$ (рис. 56, *б*). Для удобства дальнейших вычислений будем считать, что точка $A$ имеет координаты (3, 0). Возьмем точку $M(x, y)$, удовлетворяющую условию задачи, и выразим расстояния от нее до точек $A$ и $B$ по формулам (п. 22.6) $MA^2=(x-3)^2+y^2$, $MB^2=x^2+y^2$. Так как по условию $\frac{MA}{MB}=2$, то $MA^2=4MB^2$. В координатах последнее равенство выражается так:

$$(x-3)^2+y^2=4(x^2+y^2). \qquad (7)$$

Отсюда, раскрыв скобки и приведя подобные, получаем:

$$x^2+y^2+2x=3. \qquad (8)$$

Выделяем полный квадрат по переменной $x$:

$$(x+1)^2+y^2=4. \qquad (9)$$

Итак, точка $M(x, y)$ удовлетворяет условию $\frac{MA}{MB}=2$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (9). Следовательно, искомая фигура задается уравнением (9). Первый этап решения задачи завершен.

2. *Геометрическое истолкование выведенного уравнения.* Нам известно (п. 25.2), что уравнение (9) задает окружность с центром в точке $(-1, 0)$ и радиусом 2. Итак, если $k=2$, то решением задачи является эта окружность.

Попытайтесь повторить проведенные рассуждения и выкладки для произвольного числа $k \neq 1$, считая, что точка $A$ имеет координаты $(a, 0)$. В результате вы должны прийти к такому уравнению:

$$\left(x - \frac{a}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{(1-k^2)^2}.$$

Оно задает окружность (где ее центр? Каков радиус?). Эта окружность и является решением задачи в общем случае. ■

Получить этот результат, не пользуясь координатами, не так просто. ●

## 25.7. Парабола, эллипс, гипербола

Изменим формулировку задачи п. 25.6, заменив одну из данных точек прямой. Получим такую задачу: *что представляет собой множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до данной точки и данной прямой есть величина постоянная?*

Начнем ее решать по тому же плану, что и задачу об окружности Аполлония.

Пусть нам заданы прямая $l$ и точка $A$, не лежащая на этой прямой, а также некоторое положительное число $k$. Введем систему прямоугольных координат. Начало координат — точку $O$ — выберем в середине перпендикуляра $AB$, опущенного на прямую $l$ (рис. 57). Положительной полуосью $y$ считаем луч $OA$.

Первая часть решения задачи заключается в выводе уравнения фигуры, состоящей из тех точек $M$, для которых $\frac{MA}{|Ml|}=k$, или, что то же самое, $MA=k|Ml|$. Напомним, что символом

$|Ml|$ обозначается расстояние от точки $M$ до прямой $l$, т. е. длина перпендикуляра $MN$, опущенного из точки $M$ на прямую $l$.

Положим $AB=p$. Тогда точка $A$ имеет координаты $\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$, а прямая $l$ задается уравнением $y=-\frac{p}{2}$. Возьмем точку $M(x, y)$, удовлетворяющую условию задачи. Так как точка $N$ имеет координаты $\left(x,\ -\frac{p}{2}\right)$, то $|Ml|=MN=\sqrt{\left(y+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|y+\frac{p}{2}\right|$.

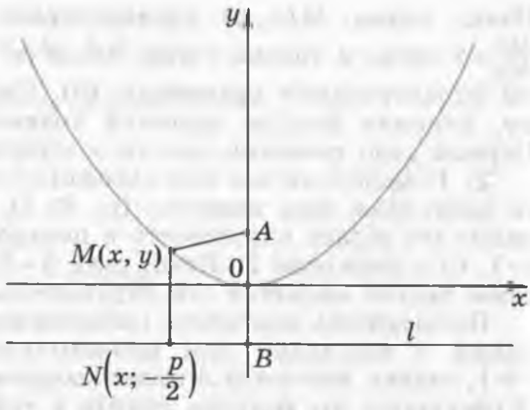


Рис. 57

Далее, $MA=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}$. Поэтому уравнение искомой фигуры запишется так:

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=k\left|y+\frac{p}{2}\right|. \qquad (10)$$

Оно равносильно такому уравнению:

$$x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=k^2\left(y+\frac{p}{2}\right)^2. \qquad (11)$$

Упростив его, получим уравнение

$$x^2+y^2(1-k^2)-(1+k^2)py=(k^2-1)\frac{p^2}{4}. \qquad (12)$$

Если $k=1$, то (12) еще упрощается и мы приходим к такому уравнению:

$$y=\frac{1}{2p}x^2. \qquad (13)$$

Как мы знаем из курса алгебры, уравнение (13) задает параболу — график квадратичной функции. Итак, мы доказали, что *множество точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой, является параболой.*

Этот простейший случай рассматриваемой задачи привел к фигуре, известной из курса алгебры. Два других случая $k<1$ и $k>1$ дадут нам новые, не известные еще фигуры.

Итак, мы переходим ко второму этапу решения задачи — построению фигуры по ее уравнению (12). Для простоты положим $p=2$.

Тогда уравнение (12) приводится к виду

$$x^2+(1-k^2)\,y^2-2\,(1+k^2)\,y=k^2-1. \qquad (14)$$

Выделив полный квадрат при переменной $y$, получим:

$$x^2+(1-k^2)\left(y-\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2=\frac{4k^2}{1-k^2}. \qquad (15)$$

Сделаем замену переменных по формулам $x'=x$ и $y'=y-\frac{1+k^2}{1-k^2}$. (Эта замена соответствует переносу начала координат в точку $\left(0;\ \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)$; направления же осей координат не меняются.) После такой замены уравнение (15) примет вид

$$x'^2+(1-k^2)\,y'^2=\frac{4k^2}{1-k^2}. \qquad (16)$$

Если $k<1$, то, положив $\frac{4k^2}{1-k^2}=a^2$ и $\frac{4k^2}{(1-k^2)^2}=b^2$, из (16) получим:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1. \qquad (17)$$

Фигура, заданная уравнением (17), называется **эллипсом** (рис. 58). Эллипс похож на сжатую окружность.

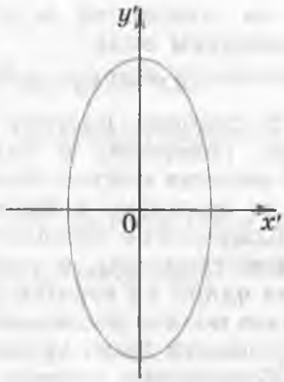



Рис. 58

Если же $k>1$, то, положив $\frac{4k^2}{1-k^2}=-a^2$ и $\frac{4k^2}{(1-k^2)^2}=b^2$, из (16) получим:

$$-\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1. \qquad (18)$$

Фигура, заданная уравнением (18), называется **гиперболой** (рис. 59). Гипербола состоит из двух ветвей. Эти ветви уходят в бесконечность вдоль двух пересекающихся прямых — асимптот гиперболы, сколь угодно близко приближаясь к этим прямым. Если асимптоты гиперболы взаимно перпендикулярны, то их можно выбрать осями координат. И тогда уравнение гиперболы запишется в уже известном вам виде: $y=\frac{c}{x}$.

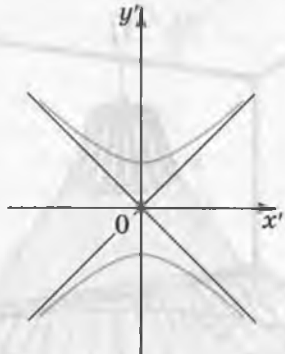



Рис. 59

Имеется еще ряд важных свойств, объединяющих в один класс эллипсы, гиперболы и параболы. Например, ими исчерпываются «невырожденные», т. е. не сводящиеся к точке, прямой или паре прямых, кривые, которые задаются на плоскости в декартовых координатах уравнением вида

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \qquad (19)$$

В старших классах будет доказано, что эллипс, гиперболу и параболу можно получить как сечение конуса плоскостью (рис. 60). Поэтому их называют **коническими сечениями.**

Конические сечения изучали еще древнегреческие геометры, и теория конических сечений была одной из вершин античной геометрии. Наиболее полное исследование конических сечений в древности было проведено Аполлонием.

Конические сечения играют важную роль в природе. Так, по эллиптическим, параболическим и гиперболическим орбитам движутся тела в поле тяготения (планеты и кометы вокруг Солнца). Замечательные свойства конических сечений часто используются в науке и технике, например при изготовлении некоторых оптических приборов или прожекторов (поверхность зеркала в прожекторе можно рассматривать как результат вращения дуги параболы вокруг оси параболы). Мы можем наблюдать конические сечения как границы тени от круглых абажуров (рис. 61).

**Замечание.** Обратите внимание, что удачный выбор системы координат может сильно упростить не только решение задачи, но и уравнение фигуры. Сравните, например, уравнение (19) и уравнение (17).

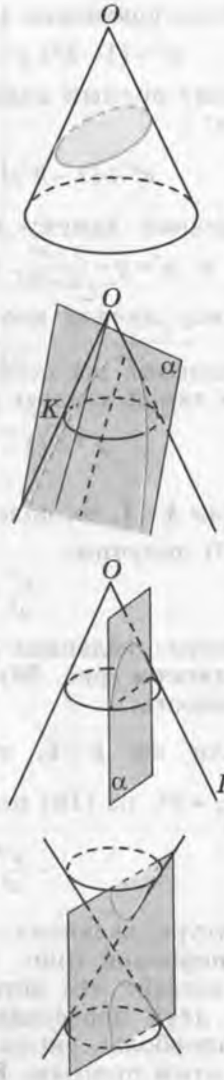


Рис. 60

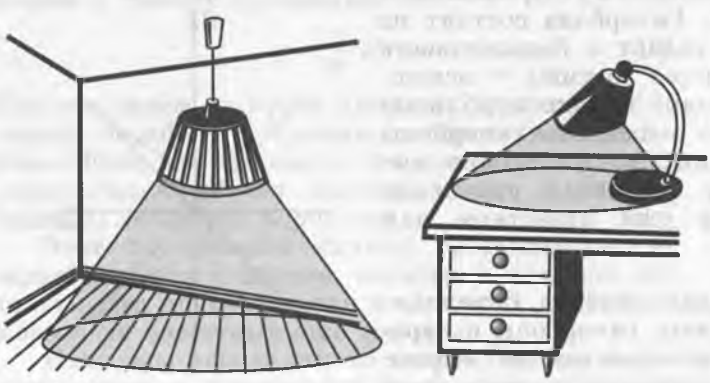


Рис. 61

## Вопросы

1. Что означает фраза: «Фигура $F$ задается данным уравнением (неравенством)»?
2. Что означает фраза: «Графиком данного уравнения является фигура $F$»?
3. Какие вы знаете уравнения фигур?
4. В чем состоит метод координат? В чем его достоинства и недостатки?
5. Приведите примеры использования метода координат.
6. Что вы знаете о конических сечениях?

## Задачи к § 25

Дополняем теорию

**25.1** 4 Докажите, что уравнением прямой, проходящей через точку $(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом $k$, является уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$.

**25.2** 4 а) Две прямые, не перпендикулярные оси $x$, параллельны. Докажите, что их угловые коэффициенты равны. Проверьте обратное.
б) Как, используя результаты, полученные в задаче «а», узнать, лежат ли три точки, заданные своими координатами, на одной прямой?
в) Какая связь между угловыми коэффициентами взаимно перпендикулярных прямых?

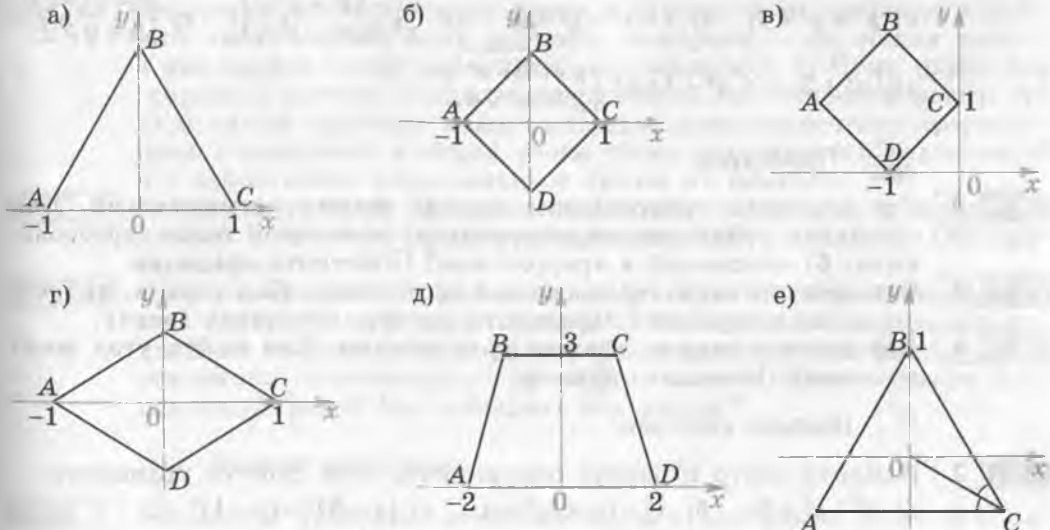


Рис. 62

Смотрим

**25.3** 4 Напишите уравнения прямых, проходящих через вершины многоугольников (рис. 62), если: а) $AB=BC=CA$; б), в) $ABCD$ — квадрат; г) $ABCD$ — ромб с углом $60°$; д) $ABCD$ — трапеция, $AB=BC=CD$; е) $AB=BC=CA$.

Рисуем

**25.4** 1,3 Нарисуйте фигуру, которая задается условием: а) $x=1$; б) $y=-3$; в) $x(x-1)=0$; г) $(y+2)(y+1)=0$; д) $(x-2)(y+3)=0$; е) $|x|=1$; ж) $|y|=2$; з) $(x+1)^2+(y-2)^2=0$; и) $(x-y)(x+y)=0$; к) $|xy|=1$.

**25.5** 1,3 Нарисуйте фигуру, которая задается таким условием:

а) $x\leqslant 5$; б) $y\geqslant -2$; в) $-1\leqslant x\leqslant 0$; г) $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ y\leqslant -2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x\leqslant -1, \\ y\leqslant 2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 1, \\ -2\leqslant y\leqslant 3; \end{cases}$ ж) $xy>0$; з) $x(x-1)\geqslant 0$; и) $x(y-1)\leqslant 0$;

к) $(x+2)(y-1)\geqslant 0$; л) $|x|\leqslant 1$; м) $|y-1|\geqslant 1$; н) $y^2\leqslant 1$; о) $x^2\geqslant 4$;

п) $\frac{x}{y}\geqslant 0$; р) $y-|y|=x+|x|$.

**25.6** 1,3 Нарисуйте фигуру, которая задается условием:

а) $\begin{cases} y\geqslant x, \\ y\leqslant 2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y\geqslant -x, \\ y\leqslant x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y\geqslant -x+1, \\ y\leqslant x-1, \\ x\leqslant 2. \end{cases}$

**25.7** 2 Нарисуйте фигуру, заданную таким условием:

а) $x^2+y^2\leqslant 1$; б) $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$; в) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2\leqslant 1, \\ x^2+(y-1)^2\leqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 9, \\ x+y\geqslant 2; \end{cases}$

д) $|y|+2|x|\leqslant x^2+1$; е) $\begin{cases} y\geqslant\sqrt{1-x^2}, \\ y+|x|\leqslant 4. \end{cases}$

Планируем

**25.8** 4 Три вершины треугольника заданы своими координатами. Как составить уравнение окружности: а) описанной около треугольника; б) вписанной в треугольник? Приведите примеры.

**25.9** 4 Четырехугольник задан своими вершинами. Как узнать, является ли он выпуклым? Приведите пример. Обобщите задачу.

**25.10** 4 Две прямые заданы своими уравнениями. Как найти угол между ними? Приведите пример.

Находим величину

**25.11** 2 Найдите центр и радиус окружности, если дано ее уравнение:

а) $x^2+y^2=5$; б) $x^2+(y+5)^2=4$; в) $(x+5)^2+(y-1)^2=2$;

г) $x^2-x+y^2=0$; д) $x^2-x=y-y^2$; е) $x^2+y^2=a^2$.

**25.12** **2** Пусть известны координаты центра окружности и ее радиус. По ней движется точка $K$. Каковы ее координаты, если радиус, проведенный в точку $K$, составляет с осью $x$ угол $\varphi$?

**25.13** **2** Используя метод координат, выясните, сколько общих точек могут иметь: а) прямая и окружность; б) две окружности.

**25.14** **2** Дан квадрат $ABCD$ со стороной 2. Чему равен радиус окружности, проходящей через: а) $A$, $B$ и середину стороны $BC$; б) $A, C$ и середину стороны $CD$; в) $C$, середину стороны $AB$ и точку пересечения диагоналей; г) $A, D$ и точку $K$ на стороне $CB$, такую, что $CK=\frac{1}{3}CB$?

**25.15** **2** В круге радиусом $R$ две хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $P$ под прямым углом. Чему равны величины: а) $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$; б) $BC$, если $AD=a$; в) $AB^2+CD^2$, если расстояние от точки $P$ до центра круга равно $a$?

**25.16** **4** Чему равен угловой коэффициент прямой: а) заданной уравнением: 1) $-2x-3y=1$; 2) $x=y+1$; 3) $y=-2$; 4) $x=1$; б) проходящей через точки: 1) $(0, 1)$ и $(-2, 3)$; 2) $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$?

**25.17** **4** Даны точки $A(-2, -3)$ и $B(4, 1)$. Найдите точку, равноудаленную от данных точек и лежащую: а) на прямой $y=-x$; б) на окружности $x^2+y^2=4$.

### Ищем границы

**25.18** **2** На диаметре данной окружности взята точка $A$. Расстояние от нее до центра равно $d$. Параллельно этому диаметру проводятся всевозможные хорды этой окружности $PQ$. В каких границах лежит величина $AP^2+AQ^2$?

**25.19** **2** Две окружности касаются извне. а) Существует ли равносторонний треугольник, одна вершина которого — их общая точка, а две другие лежат на данных окружностях? б) Чему равна его сторона в случае, когда радиусы обеих окружностей равны $R$? в) В каких границах лежит площадь равнобедренного треугольника с вершиной в общей точке обеих окружностей радиусом $R$ и с основанием, параллельным линии их центров?

**25.20** **2** Пусть треугольник $ABC$ равносторонний со стороной 1, а точка $X$ любая. Вычислите минимум величины $XA^2+XB^2+XC^2$. Обобщите задачу.

**25.21** **5,6** Стороны прямого угла пересекает прямая. На отрезке этой прямой внутри угла берется точка и из нее проводятся перпендикуляры на стороны угла. В каких границах лежит площадь прямоугольника, ограниченного сторонами угла и проведенными перпендикулярами? Как обобщить эту задачу?

### f-0 Выводим уравнение

**25.22** **2** Напишите уравнение окружности: а) с центром в точке $O$ и радиусом 2; б) с центром в точке $(-2, 1)$ и радиусом 3; в) с центром в точке $(-3, 0)$ и проходящей через точку $O$; г) с центром в точке $(0, -2)$ и проходящей через точку $(-4, 1)$; д) с центром в точке $(-5, 4)$ и касающейся оси $x$; е) с центром $(-2, 2)$ и касающейся осей координат; ж) с центром $(2, 0)$ и касающейся прямой $y=x$.

**25.23** **2** Напишите уравнение окружности: а) проходящей через начало координат, радиус которой равен 1; б) проходящей через точки $(1, 0)$ и $(-5, 0)$, радиус которой 10; в) проходящей через точки $(-2, -1)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$; г) проходящей через точки $(1, -1)$, $(2, -2)$ и касающейся оси $y$; д) проходящей через точку $(2, 1)$ и касающейся осей координат; е) касающейся прямых $y=\frac{1}{2}x$ и $y=2x$.

**25.24** **4** Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(-2, -1)$ и: а) имеющей угловой коэффициент: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-2$; 3) 0; б) не имеющей углового коэффициента.

**25.25** **4** Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(-2, -3)$ и образующей с осью $x$ угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°; з) $\varphi$. Какая из них проходит ближе к началу координат?

**25.26** **4** Напишите уравнение прямой, проходящей через точки: а) $(-2, 3)$ и $(3, 2)$; б) $(3, 0)$ и $(3, 2)$; в) $(-3, -1)$ и $(7, -1)$; г) $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$.

**25.27** **4** Дана точка $(3, -1)$. Напишите уравнение прямой, проходящей через эту точку и: а) параллельной оси $x$; б) параллельной оси $y$; в) образующей с осью $x$ угол 45°; г) образующей с осью $x$ угол 150°; д) параллельной прямой, уравнение которой $y=x+1$; е) перпендикулярной прямой, уравнение которой $y=x$.

**25.28** **4** Прямая задана уравнением $ax+by+c=0$. Напишите уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через точку $(x_0, y_0)$, не лежащую на данной прямой.

**25.29** **5,6** Точка $A$ движется в системе координат по прямой $y=x$. Из нее проведен отрезок $AB$ длиной 1 по одну сторону от прямой. Напишите уравнение линии, по которой движется точка $B$, если: а) $AB \parallel y$; б) $AB \parallel x$; в) прямая $AB$ перпендикулярна данной прямой.

**25.30** **5,6** Напишите уравнение линии, по которой движется в системе координат точка $K$, такая, что $KA=KB$, если: а) $A(0, 0)$, $B(4, 0)$; б) $A(0, 3)$, $B(0, -5)$; в) $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$; г) $A(2, 3)$, $B(-4, 5)$.

**25.31** **5,6** Напишите уравнение линии, по которой движется в системе координат точка $K$, такая, что $KA=2KB$, если: а) $A(0, 0)$, $B(-4, 0)$; б) $A(3, 0)$, $B(1, 0)$; в) $A(-1, 2)$, $B(2, -1)$.

**25.32** **7** Даны две точки $A(1, 0)$ и $B(-1, 0)$. Напишите уравнение линии, по которой движется точка $K$, такая, что $KA+KB=4$. Решите задачу в общем случае.

**25.33** **7** Даны две точки $A(1, 0)$ и $B(-1, 0)$. Напишите уравнение линии, по которой движется точка $K$, такая, что $|KA-KB|=1$. Решите задачу в общем случае.

### Доказываем

**25.34** **2** а) В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки. Обобщите эту задачу.

б) Решите задачу, аналогичную задаче «а», для описанной окружности. Обобщите ее.

**25.35** **4** Известно, что множество точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая. Используйте это для вывода уравнения прямой.

### Исследуем

**25.36** **2** Окружность задана уравнением $x^2+y^2=21$. Исследуйте положение точки $A$ относительно данного круга, если: а) $A(1, a)$; б) $A(a, -2)$; в) $A(-a, -a)$.

**25.37** **2** Является ли уравнением окружности уравнение:
а) $x^2+y^2=a$; б) $x^2-y^2=1$; в) $x^3+y^3=1$; г) $x^2+y^2=0$?

**25.38** **2** Окружность задана уравнением $(x+3)^2+(y-4)^2=10$. Пересекает ли эта окружность: а) ось $x$; б) ось $y$; в) прямую $y=-x$; г) прямую $y=x+2$; д) окружность $x^2+y^2=1$?

**25.39** **4** Какие фигуры, кроме прямой, может задавать уравнение $ax+by+c=0$ в зависимости от значений $a$, $b$, $c$?

**25.40** **4** Прямая задана своим уравнением. Как узнать: а) в каких точках она пересекает оси координат; б) на каком расстоянии от начала координат она проходит?

**25.41** **4** а) Прямая задана уравнением $ax+by+c=0$. Дана точка $A(x_0, y_0)$. Надо узнать, в какой полуплоскости, ограниченной этой прямой, лежит данная точка. Как это сделать? Приведите пример.

б) Две прямые, заданные своими уравнениями, пересекаются. Дана точка $A(x_0, y_0)$. Требуется узнать, в каком из углов, образованных этими прямыми, находится точка $A$. Как это сделать? Приведите пример.

**25.42** **5,6** По какой линии движется в системе координат точка $K$, если она равноудалена от: а) оси $x$ и $A(0, 2)$; б) оси $x$ и $B(0, -2)$; в) оси $y$ и $C(2, 0)$; г) оси $y$ и $D(-2, 0)$?

**25.43** **5,6** Дан прямой угол $O$ со сторонами $a$ и $b$. По какой линии движется внутри его точка $K$, если: а) $|Ka|=|Kb|$; б) $|Ka|=2|Kb|$; в) $|KO|=2|Kb|$; г) $|KO|=2|Ka|$; д) $|Ka|+|Kb|=1$?

**25.44** **5,6** Точка $A$ движется по окружности $x^2+y^2=1$. Из каждой точки окружности проводится отрезок $AB$ длиной 1. По какой линии движется точка $B$, если $AB$ проводится: а) параллельно оси $y$ и вверх; б) параллельно оси $x$ и вправо; в) перпендикулярно $OA$?

**25.45** **5,6** Отрезок $AB$ длиной 1 движется так, что его концы лежат на двух сторонах прямого угла $O$. По какой линии движется: а) точка $C$ прямоугольника $OACB$; б) середина этого отрезка?

**25.46** **5,6** Квадрат со стороной 1 движется внутри прямого угла так, что две его соседние вершины находятся на сторонах угла. По каким линиям движутся две другие его вершины? А как выглядит результат для других фигур, например, прямоугольника, равностороннего треугольника?

**25.47** **5,6** Дан прямой угол с вершиной $O$. а) Рассматриваются прямоугольники заданного периметра, две стороны которых лежат на сторонах данного угла. На какой линии будут располагаться вершины этих прямоугольников, лежащие внутри угла? б) Ответьте на этот же вопрос для прямоугольников постоянной площади.

**25.48** **5,6** Даны две точки $A$ и $B$. Пусть $AB=2$. По какой линии движется точка $K$, такая, что: а) $KA^2-KB^2=1$; б) $KA^2+KB^2=1$? Обобщите эти задачи.

## Участвуем в олимпиаде

**25.49** Докажите, что квадрат радиуса окружности, описанной около многоугольника с вершинами в точках с целыми координатами, является рациональным числом.

**25.50** Докажите, что на координатной плоскости нельзя нарисовать выпуклый четырехугольник, у которого одна диагональ вдвое длиннее другой, угол между диагоналями равен 45°, а координаты каждой вершины являются целыми числами.

**25.51** В единичной квадратной решетке берется произвольный единичный квадрат. Докажите, что одно из расстояний от произвольного узла решетки до вершин этого квадрата иррационально.

**25.52** На координатной плоскости $Oxy$ рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники $OAB$ с основанием $OB$, у которых вершина $O$ — начало координат, вершина $A$ лежит на графике функции $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ $(x>1)$, вершина $B$ лежит на оси $Ox$. Докажите, что прямые $AB$ касаются одной и той же окружности.

**25.53** Докажите, что точки пересечения парабол $y=x^2+x-41$ и $x=y^2+y-40$ лежат на одной окружности.

**25.54** Координаты вершины $C(x, y)$ треугольника $ABC$ удовлетворяют неравенствам $x^2+y^2\leqslant 8+2y$, $y\geqslant 3$, а сторона $AB$ лежит на оси абсцисс. Найдите наибольшее значение площади треугольника $ABC$, если известно, что точка $Q(0, 1)$ находится на расстоянии 1 от прямых $AC$ и $BC$.

**25.55** Три последовательные вершины ромба лежат соответственно на сторонах данного квадрата со стороной 1. Найдите площадь фигуры, которую заполняют четвертые вершины таких ромбов.

**25.56** Дан остроугольный треугольник $ABC$. На его сторонах вне его построены два равносторонних треугольника $ABC_1$ и $ACB_1$. Пусть $K$ и $L$ — середины сторон $AC_1$ и $B_1C$, а $M$ — такая точка на стороне $BC$, что $BM=3MC$. Докажите, что углы треугольника $KLM$ равны 90°, 60°, 30°.

## Задачи к главе IV

### Планируем

IV.1 а) Пусть известны координаты середин сторон треугольника. Как найти координаты его центроида?

б) Пусть известны координаты двух вершин треугольника и координаты его центроида. Как найти координаты его третьей вершины?

в) Составьте сами задачи, аналогичные задачам «а» и «б», работая с вершинами треугольника, серединами его сторон и центроидом.

IV.2 На диагонали $BD$ квадрата $ABCD$ находится точка $M$. Как найти точку $N$ на его стороне $BC$, такую, что $\angle AMN = 90°$? (Решите аналитически.)

### Находим величину

IV.3 Сумма единичных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ равна $\vec{0}$. Чему равно выражение $\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1$?

### Ищем границы

IV.4 Из всех треугольников с данным основанием и данной высотой к этому основанию найдите тот, около которого можно описать окружность наименьшего радиуса.

IV.5 На стороне треугольника выбирается точка и через нее проводятся две хорды треугольника, параллельные его сторонам. Их концы соединяются отрезком. При каком выборе исходной точки полученный отрезок будет иметь наименьшую длину?

### Выводим уравнение

IV.6 Известны координаты трех вершин треугольника: $A(-2,\ 1)$, $B(1,\ 3)$, $C(2,\ -2)$. а) Напишите уравнение: 1) прямой $AC$; 2) медианы, проведенной из вершины $A$; 3) высоты, проведенной из вершины $B$. б) Вычислите длины отрезков в задачах «а».

IV.7 Напишите уравнение окружности: а) проходящей через начало координат, точку $(1,\ 0)$ и касающейся окружности, уравнение которой $x^2 + y^2 = 9$; б) проходящей через точку $(2,\ 1)$ и касающуюся осей координат; в) описанной около треугольника с вершинами в точках $(0,\ 4)$, $(1,\ 2)$, $(3,\ -2)$; г) вписанной в треугольник, ограниченный осями координат и прямой $3x + 4y - 12 = 0$; д) с центром в точке $(6,\ 7)$ и касающейся прямой $5x - 12y - 24 = 0$.

### Доказываем

**IV.8** В треугольнике $ABC$ $\angle C=90°$, $CA=CB$. Точка $A_1$ лежит на $BC$, точка $B_1$ лежит на $CA$, точка $C_1$ лежит на $AB$, причем эти точки делят стороны в одном отношении: $BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = AC_1 : C_1B$. Докажите, что $CC_1 \perp A_1B_1$, $CC_1 = A_1B_1$.

**IV.9** а) Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный прямой $l$, $K$ — данная точка и $A$ — точка на данной прямой. Докажите, что $|Kl| = |\vec{n}\cdot\overrightarrow{AK}|$.

б) Пусть прямая задана уравнением $ax+by+c=0$. Докажите, что если вектор $(a, b)$ единичный, то расстояние от начала координат до прямой равно $|c|$. От чего зависит знак $c$?

### Исследуем

**IV.10** Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — единичные векторы плоскости. Верно ли, что среди них существуют такие два, что длина их суммы не меньше чем $\frac{2}{3}$?

**IV.11** Выражение $ab+cd$ истолкуйте как скалярное произведение двух векторов. Пусть при этом $a^2+b^2=c^2+d^2=1$. Каким теперь будет это истолкование?

а) Докажите, что $|ab+cd| \leqslant \sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+d^2}$. б) Докажите, что $\left|\frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \leqslant \frac{1}{2}$.

**IV.12** Найдите множество точек внутри прямого угла, таких, что: а) сумма расстояний от них до сторон угла равна сумме величин, обратных этим расстояниям; б) произведение расстояний от них до сторон угла равно разности этих расстояний; в) разность расстояний от них до сторон угла равна разности величин, обратных этим расстояниям.

**IV.13** Пусть $A$ и $B$ — две данные точки. Какой фигурой является множество точек $M$, таких, что:
а) $MA^2-MB^2=c$; б) $MA^2-k^2MB^2=c$ $(k\neq 1)$;
в) $MA^2+k^2MB^2=c$; г) $a\cdot MA^2+b\cdot MB^2=c$?

**IV.14** Пусть $ABCD$ — квадрат. Найдите множество точек $M$, таких, что: а) $MA+MC=MB+MD$; б) $\angle AMB=\angle AMD$; в) $\angle AMB=\angle CMD$.

**IV.15** Рассмотрим систему $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

Дайте ей два различных векторных истолкования. С помощью векторов проведите исследование такой системы, т. е. выясните, когда она имеет решения и сколько решений.

**IV.16** Какая фигура задается векторным уравнением:
а) $(\vec{r}-\vec{r}_1)^2=1$; б) $(\vec{r}-\vec{r}_1)^2=(\vec{r}-\vec{r}_2)^2$; в) $\vec{r}\cdot\vec{r}_1=0$; г) $\vec{r}\cdot\vec{c}=1$?
($\vec{r}$ — радиус-вектор переменной точки фигуры; $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ — радиус-векторы данных точек фигуры; $\vec{c}$ — фиксированный вектор.)

# Дополнение к главе IV

# Векторы и координаты в пространстве

Мы убедимся сейчас, что вся теория, изложенная в главе IV, по существу, многомерна и для размерностей два (планиметрия) и три (стереометрия) во многом аналогична.

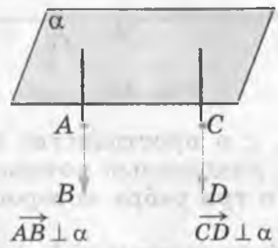



Рис. 63

## 1. Понятие вектора

Обратимся теперь к векторам в пространстве. К сказанному в § 18 следует добавить понятие перпендикулярности направленного отрезка и вектора плоскости. Это понятие позволяет так сформулировать первый признак сонаправленности векторов в пространстве: *векторы* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *сонаправлены, если найдется такая плоскость* α, *что, во-первых, они перпендикулярны этой плоскости и, во-вторых, лучи AB и CD лежат по одну сторону от этой плоскости* (рис. 63).

А в доказательстве того, что два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены (теорема 23), речь пойдет не о прямых, а о плоскостях, перпендикулярных одной прямой $MN$ (рис. 64). Повторите это доказательство для пространственного случая.

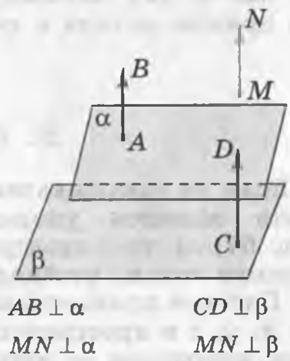



Рис. 64

Никаких других изменений в содержание § 18 вносить не нужно.

## 2. Сложение векторов и умножение вектора на число

В содержании § 19 и 20 для векторов в пространстве дополнить следует лишь п. 19.6 о разложении вектора на составляющие. А именно в пространстве каждый вектор можно разложить (и притом единственным образом) на три вектора, лежащие на трех пересекающихся в одной точке прямых, если эти прямые не лежат в одной плоскости (рис. 65). При разложении вектора по трем пересекающимся прямым

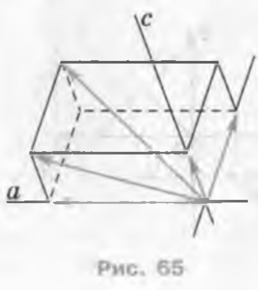



Рис. 65

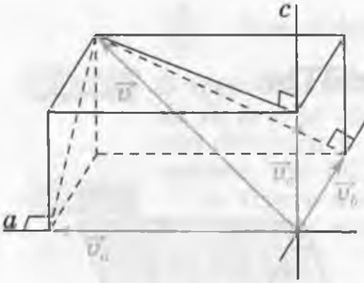



Рис. 66

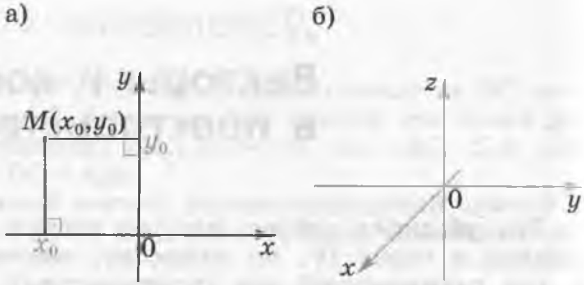



Рис. 67

$a$, $b$, $c$ в пространстве мы строим параллелепипед, диагональю которого является данный вектор и три ребра которого лежат на данных прямых.

Если прямые $a$, $b$, $c$ попарно взаимно перпендикулярны, то составляющие вектора получаются, как и для плоскости, проектированием на эти прямые начала и конца вектора (рис. 66).

## 3. Координаты точки

Если на координатной плоскости положение точки задается упорядоченной парой чисел (рис. 67, *а*), то в пространстве, чтобы задать положение точки, необходимы уже три координаты. Система прямоугольных декартовых координат $x$, $y$, $z$ в пространстве задается выбором начала координат — точки $O$ — и трех попарно взаимно перпендикулярных координатных осей $x$, $y$, $z$, проходящих через точку $O$ (рис. 67, *б*). Ось $z$ называют **осью аппликат**. Обычно ось $z$ представляют направленной вертикально вверх, а координатную плоскость $xy$, проходящую через оси $x$ и $y$, — горизонтальной.

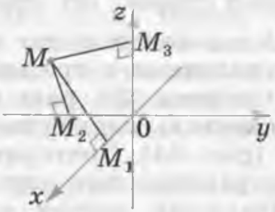



Рис. 68

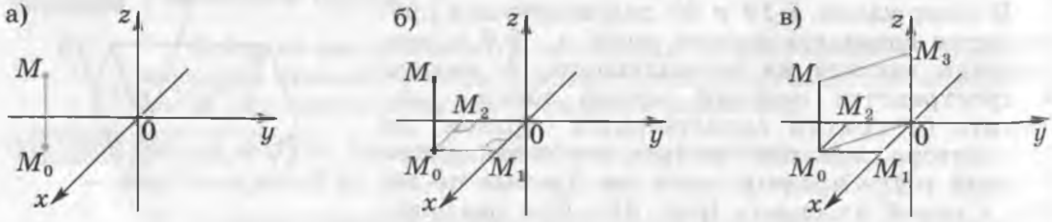



Рис. 69

Теперь для каждой точки $M$ пространства упорядоченная тройка ее координат находится следующим образом. Точка $M$ проектируется в точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ на координатные оси $x$, $y$, $z$ (рис. 68). Координаты $x_0$, $y_0$, $z_0$ этих точек на осях координат и составят тройку $(x_0, y_0, z_0)$ координат точки $M$.

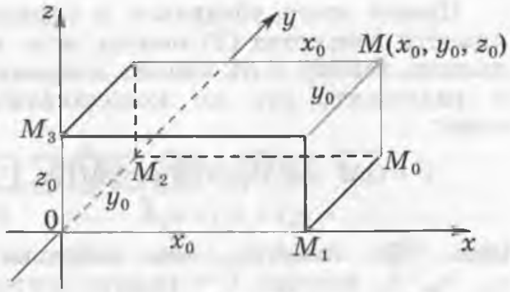


Рис. 70

Точки $M_1$ и $M_2$ можно построить и так. Сначала проектируют точку $M$ в точку $M_0$ на координатную плоскость $xy$ (рис. 69, *а*), а затем точку $M_0$ на плоскости $xy$ проектируют в точки $M_1$ и $M_2$ (рис. 69, *б*). Рисунок 69 более нагляден, чем рисунок 68. Чтобы завершить построение — построить точку $M_3$, надо провести отрезок $OM_0$ и провести отрезок $MM_3$ параллельно отрезку $OM_0$ (рис. 69, *в*).

Заметим, что координаты точки в пространстве — это расстояния от нее до координатных плоскостей, взятые с соответствующим знаком. Если точка $M$ не лежит ни в одной из координатных плоскостей, то эти расстояния — длины ребер прямоугольного параллелепипеда, ребрами которого являются отрезки $OM_1$, $OM_2$, $OM_3$ (рис. 70).

Пространство, в котором задана система прямоугольных координат, мы будем называть **координатным пространством**.

## 4. Координаты вектора. Расстояние между точками

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$ и обозначим единичные векторы координатных осей $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 71). Координатами вектора $\vec{v}$ на координатной плоскости $xy$ мы назвали в п. 22.1 его проекции $v_x$ и $v_y$ на координатные оси и доказали, что

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}. \qquad (1)$$

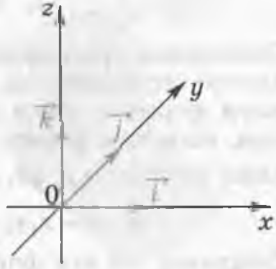


Рис. 71

И в пространстве координатами вектора $\vec{v}$ называются его проекции $v_x$, $v_y$, $v_z$ на координатные оси, и имеет место равенство

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \qquad (2)$$

Проще всего убедиться в справедливости равенства (2) можно, если отложить вектор $\vec{v}$ от начала координат и разложить его по координатным осям:

$$\vec{v}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}=$$
$$=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k} \quad (3)$$

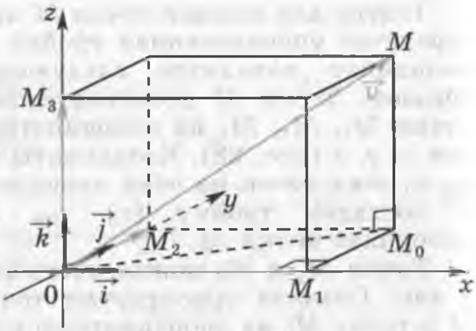


Рис. 72

(рис. 72). Заметим, что координаты $v_x$, $v_y$, $v_z$ вектора $\vec{v}$ — радиус-вектора точки $M$ — это координаты точки $M$ в заданной системе прямоугольных координат.

Если же вектор $\vec{v}$ отложен от произвольной точки $A$, т. е. $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, то его координаты $v_x$, $v_y$, $v_z$ выражаются через координаты его начала $A(x_A, y_A, z_A)$ и конца $B(x_B, y_B, z_B)$ по формулам

$$v_x=x_B-x_A,\ v_y=y_B-y_A,\ v_z=z_B-z_A \text{ (рис. 73).} \quad (4)$$

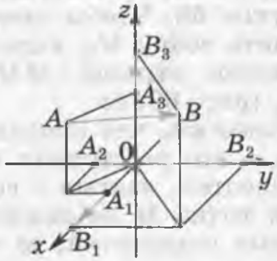


Рис. 73

Если вектор $\vec{v}$ отложен от начала координат: $v=\overrightarrow{OM}$, то его модуль (в общем случае) — это длина диагонали $OM$ прямоугольного параллелепипеда с ребрами $OM_1$, $OM_2$, $OM_3$ (рис. 72). Длины этих ребер равны модулям проекций $v_x$, $v_y$, $v_z$ вектора $\vec{v}$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам $OM_1M_0$ и $OM_0M$, получаем, что $OM^2=OM_1^2+OM_2^2+OM_3^2$. Поэтому

$$|\vec{v}|^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2. \quad (5)$$

Поскольку модуль вектора $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ — это длина отрезка $AB$, то из равенств (4) и (5) вытекает формула для расстояния между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$:

$$|AB|=((x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2)^{0,5}. \quad (6)$$

## 5. Скалярное умножение векторов

Скалярное произведение двух векторов в пространстве определяется, как и на плоскости. Используя формулу (6) и обобщенную теорему Пифагора, выводим формулу для скалярного произведения векторов $\vec{a}$ $(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}$ $(x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \quad (7)$$

Опираясь на эту формулу, выводим свойства скалярного произведения, так же как в п. 23.3.

# Глава V

# Преобразования

## § 26. Движения и равенство фигур

### 26.1. Преобразования фигур

Одна из первых задач геометрии состоит в том, чтобы дать точно обоснованные правила для построения фигур с заданными свойствами. Мы решали эту задачу в основном для треугольников. Для более сложных фигур мы пока еще не имеем определения их равенства (хотя, конечно, каждый может отличить равные фигуры от неравных). Реальные построения обычно предполагают построение равных фигур, в частности фигур, обладающих свойствами симметрии. Например, фасады большинства домов симметричны и окна на этих фасадах расположены в правильном порядке. Как начертить план такого фасада или как, начертив на плане одно из окон, получить на плане же изображения остальных окон? Решение таких задач связано с преобразованием фигур.

Пусть задана некоторая фигура $F$ и каждой точке фигуры $F$ сопоставлена (ставится в соответствие) единственная точка плоскости. Множество точек, сопоставленных точкам фигуры $F$, является некоторой фигурой $F'$, вообще говоря, отличной от $F$ (рис. 74). Говорят, что фигура $F'$ получена **преобразованием** фигуры $F$. Можно сказать также, что фигура $F'$ является **образом фигуры** $F$ для данного преобразования. Фигуру $F$ называют **прообразом фигуры** $F'$.

Если $X'$ — точка фигуры $F'$, соответствующая точке $X$ фигуры $F$, то говорят, что $X'$ — **образ точки** $X$, а о точке $X$ говорят, что она является **прообразом точки** $X'$.

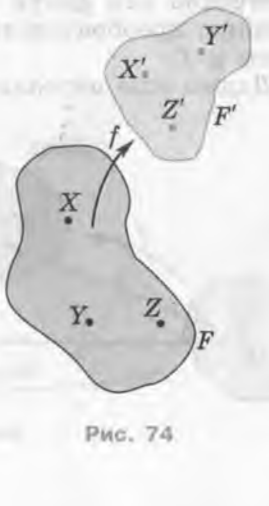



Рис. 74

Приведем простой пример. Введем на плоскости прямоугольные координаты и каждой точке $M(x, y)$ поставим в соответствие точку $M'$ с координатами $x'=x$ и $y'=ky$, где постоянная $k>0$ (рис. 75, *а*). Получим преобразование плоскости, которое называется **сжатием** к оси $x$ с коэффициентом $k$. Если $k>1$, то его называют **растяжением.** При таком преобразовании образом окружности $F$, заданной уравнением $x^2+y^2=r^2$, будет эллипс $F'$, заданный уравнением $(x')^2+\left(\frac{y'}{k}\right)^2=r^2$ (рис. 75, *б*). Именно в этом смысле в п. 25.7 мы и говорили, что эллипс получается сжатием из окружности.

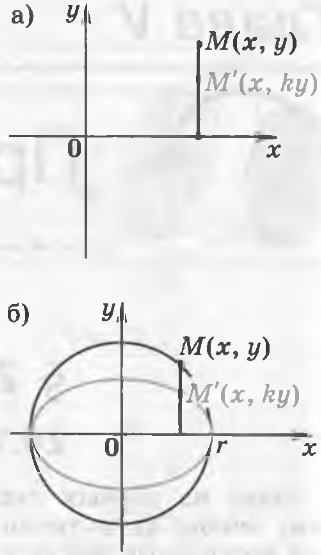


Рис. 75

Часто два или более преобразований выполняют последовательно. Если фигура $M$ преобразуется в фигуру $N$, а затем фигура $N$ преобразуется в фигуру $P$, то в результате получается преобразование фигуры $M$ в фигуру $P$ — **композиция двух преобразований** (рис. 76). В этом случае если точке $X$ фигуры $M$ сопоставлена точка $X'$ фигуры $N$, а точке $X'$ — точка $X''$ фигуры $P$, то в итоге точке $X$ сопоставляется точка $X''$.

Преобразования обозначаются как функции: запись $X'=f(X)$ означает, что преобразование $f$ сопоставляет точке $X$ точку $X'$. Так же пишут $N=f(M)$ — фигура $N$ получена из фигуры $M$ преобразованием $f$.

Если происходит сначала преобразование $f$, а затем преобразование $g$, то для точек пишут $X''=g\circ f(X)$, т. е. $X''=g(X')$, где $X'=f(X)$. Соответственно для фигур пишут $P=g\circ f(M)$, а композицию преобразований $f$ и $g$ обозначают символом $g\circ f$.

Дадим еще несколько определений.

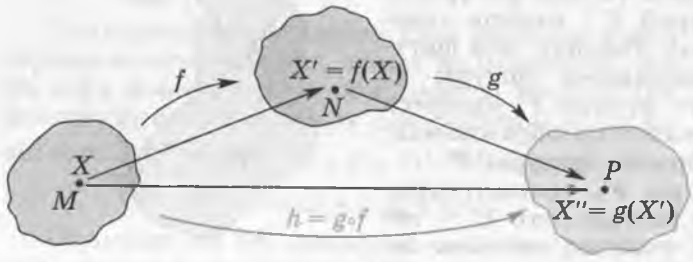


Рис. 76

**Неподвижной точкой преобразования** $f$ называется такая точка $A$, что $f(A)=A$. Преобразование, все точки которого неподвижны, называется **тождественным преобразованием.** Тождественное преобразование фигуры $M$ обозначается символом $E_M$.

Вместо слов «преобразование фигуры» можно сказать **«отображение фигуры»**.

Если при преобразовании разным точкам фигуры соответствуют разные образы, то это преобразование называют **взаимно однозначным.**

Введем еще одну операцию для взаимно однозначных преобразований. Пусть фигура $N$ получена из фигуры $M$ взаимно однозначным преобразованием $f$. В этом случае можно задать преобразование, **обратное преобразованию** $f$. Оно определяется так: если при данном преобразовании $f$ точке $X$ сопоставляется точка $X'$ (рис. 77, *а*), то при обратном преобразовании точке $X'$ сопоставляется точка $X$. (Если бы преобразование $f$ каким-то двум точкам $X$ и $Y$ сопоставляло одну и ту же точку $X'$, то преобразования, обратного преобразованию $f$, задать было бы нельзя: неизвестно, какую из точек $X$ или $Y$ сопоставить точке $X'$; рис. 77, *б*.)

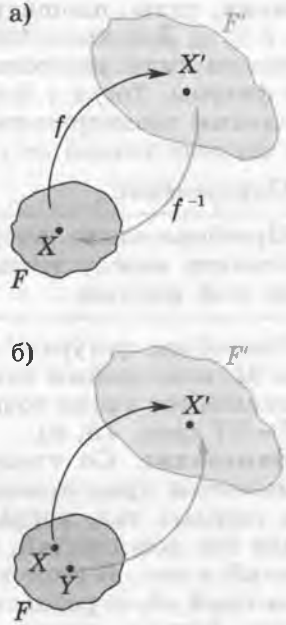


Рис. 77

Преобразование, обратное данному преобразованию $f$, обозначается $f^{-1}$. Так что если $X'=f(X)$, то $X=f^{-1}(X')$. Поэтому $f^{-1}\circ f(X)=X$, т. е. $f^{-1}\circ f=E$. Аналогично $f\circ f^{-1}=E$.

Кроме того, очевидно, что *обратное обратному преобразованию есть данное преобразование*, т. е. $(f^{-1})^{-1}=f$. Поэтому преобразования $f$ и $f^{-1}$ называют **взаимно обратными.** Каждое из них обратно другому, и все равно, какое из них считать исходным, а какое — обратным.

Преобразование, для которого существует обратное, называют **обратимым.** Оно, как мы видим, характеризуется тем, что при нем разным точкам сопоставляются разные точки. Поэтому обратимость существует лишь для взаимно однозначных преобразований.

## 26.2. Движения фигур

Самыми важными являются такие преобразования фигур, при которых сохраняются все их геометрические свойства: расстояния между точками, углы, площади, параллельность отрезков и т. д. Для этого достаточно потребовать сохранения лишь расстояний между точками данной фигуры. Тогда у фигуры сохраняются и все остальные геометрические свойства, поскольку они зависят только от расстояний.

**Определение.**

Преобразование фигуры, которое сохраняет расстояние между точками, называется **движением** этой фигуры.

Подробнее: фигура $N$ получена движением фигуры $M$, если любым точкам $X$, $Y$ фигуры $M$ сопоставляются такие точки $X'$, $Y'$ фигуры $N$, что $X'Y' = XY$ (рис. 78, *а*).

**Замечание.** Со словом «движение» обычно связывается представление о движениях реальных твердых тел, когда тело меняет свое положение без деформаций, т. е. без изменений расстояний в нем. В геометрии движение — это отвлеченный образ реальных движений. Геометрическую фигуру нельзя передвинуть в буквальном смысле слова. Рисунок на бумаге тоже нельзя передвинуть, это можно проделать с самой бумагой, но не с рисунком на ней (рис. 78, *б*).

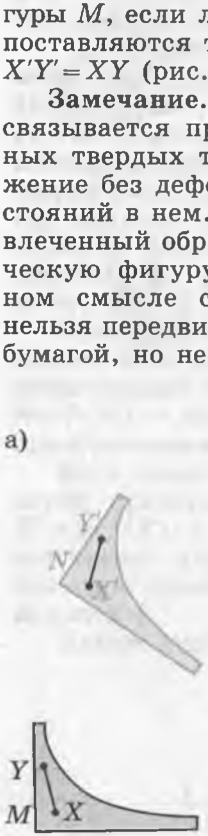




Рис. 78

## 26.3. Свойства движений

Докажем самые важные свойства движений.

**Свойство 1.**

**Три точки, лежащие на одной прямой, при движении переходят в три точки, лежащие на одной прямой, и три точки, не лежащие на одной прямой,— в три точки, не лежащие на одной прямой.**

**Доказательство.** Пусть движение переводит соответственно точки $A$, $B$, $C$ в точки $A'$, $B'$, $C'$. Тогда выполняются равенства

$$A'B'=AB,\ A'C'=AC,\ B'C'=BC. \qquad (1)$$

Если точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой, то одна из них, например точка $B$, лежит между двумя другими. В этом случае $AB+BC=AC$, и из равенства (1) следует, что $A'B'+B'C'=A'C'$. А это равенство означает, что точка $B'$ лежит между точками $A'$ и $C'$. Первое утверждение доказано. ■

Второе утверждение докажите самостоятельно (способом от противного).

**Свойство 2.**

**Отрезок движением переводится в отрезок.**

**Доказательство.** Пусть концам отрезка $AB$ движение $f$ сопоставляет точки $A'$ и $B'$. Возьмем любую точку $X$ отрезка $AB$. Тогда, как и в доказательстве свойства 1, можно установить, что ее образ — точка $X'=f(X)$ лежит между точками $A'$ и $B'$, т. е. на отрезке $A'B'$. Далее, каждая точка $Y'$ отрезка $A'B'$ является образом некоторой точки $Y$ отрезка $AB$, а именно той точки $Y$, которая удалена от точки $A$ на расстояние $A'Y'$ (объясните почему). Следовательно, отрезок $AB$ движением $f$ переводится в отрезок $A'B'$. ■

**Свойство 3.**

**При движении луч переходит в луч, прямая — в прямую.**

Эти утверждения докажите самостоятельно.

**Свойство 4.**

**Треугольник движением переводится в треугольник.**

**Доказательство.** Треугольник $ABC$ заполняется отрезками, соединяющими вершину $A$ с точками $X$ противоположной стороны $BC$ (рис. 79, *а*). Движение сопоставит отрезку $BC$ некоторый отрезок $B'C'$ и точке $A$ точку $A'$, не лежащую на прямой $B'C'$. Каждому отрезку $AX$ это движение сопоставит отрезок $A'X'$, где точка $X'$ лежит на $B'C'$. Все эти отрезки $A'X'$ заполнят треугольник $A'B'C'$. В него и переходит треугольник $ABC$. Проведите это рассуждение подробнее. ■

**Свойство 5.**

**Движение сохраняет величины углов.**

Подробнее: если точкам $A$, $B$, $C$, не лежащим на одной прямой, движение сопоставляет точки $A'$, $B'$, $C'$, то $\angle B'A'C' = \angle BAC$.

**Доказательство.** В силу равенств (1) $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$. Поэтому $\angle B'A'C' = \angle BAC$ (рис. 79, *б*).

Итак, движение сохраняет углы, а значит, и перпендикулярность. Поэтому высота треугольника движением переводится в высоту треугольника — образа. Длина высоты, как и длина основания треугольника, как полагается при движении, сохраняется. Значит, движение сохраняет площадь треугольника. И не только треуголь-

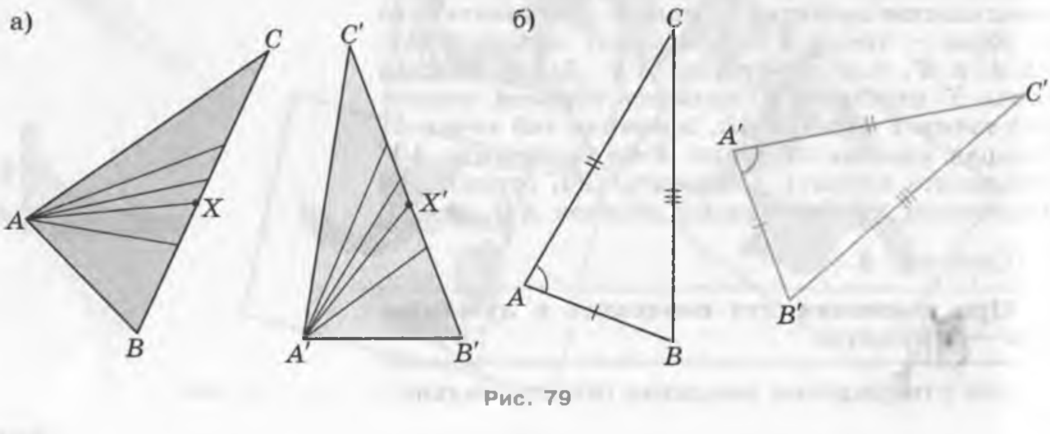



Рис. 79

ника. Многоугольные фигуры составляются из треугольников, а потому справедливо такое свойство:

**Свойство 6.**

**При движении сохраняются площади многоугольных фигур.**

Из определений движения и обратимого преобразования непосредственно вытекает еще одно свойство движений:

**Свойство 7.**

**Движение обратимо. Преобразование, обратное движению, является движением.**

Убедитесь в этом.

## 26.4. Равенство фигур

Свойства движений показывают, что две фигуры, полученные одна из другой движением, совершенно одинаковы. Но в геометрии вместо «одинаковы» говорят «равны» и дается **определение:**

**Две фигуры равны**, если между их точками есть соответствие, сохраняющее расстояния.

Другими словами, *фигура $F'$ равна фигуре $F$, если фигуру $F'$ можно получить некоторым движением фигуры $F$.*

На практике сравнивают предметы, тоже сравнивая в них соответствующие расстояния. Только говорят обычно не о расстояниях, а о соответствующих размерах предметов. При этом в отличие от теории никто не сравнивает предметы так, чтобы каждой точке одного предмета сопоставлять точку другого предмета. На деле сравнивают только те расстояния между точками, которые играют определяющую роль для этих предметов. И у геометрических фигур сравнивают только те размеры фигуры, которые ее однозначно задают. Например, в четырехугольниках сравнивают только длины сторон и диагонали, а у кругов — только радиусы.

Для треугольников определяющими размерами служат расстояния между вершинами —

длины сторон. Поэтому *равными можно назвать треугольники, длины сторон которых соответственно равны.* Аналогично можно было бы определить и равенство многоугольников. Для них определяющими размерами будут длины сторон и диагоналей. Поэтому можно дать определение: *многоугольники равны, если равны их соответствующие стороны и диагонали.*

Когда же мы обращаемся к произвольным фигурам, то неизвестно, расстояния между какими точками можно считать определяющими эти фигуры. Поэтому в общем определении равенства фигур говорится о любых точках.

## Вопросы

1. Приведите примеры преобразований реальных фигур.
2. В чем заключается преобразование фигуры?
3. Знаете ли вы, что такое: а) образ фигуры; б) прообраз фигуры; в) обратимое преобразование; г) обратное преобразование; д) композиция преобразований; е) тождественное преобразование?
4. В чем заключается движение фигуры?
5. Какие свойства фигур сохраняются при движениях?
6. Какие фигуры называются равными?

## Задачи к § 26

### Разбираемся в решении

**261** **2** Пусть $f$ — движение, $A$ и $B$ — фигуры на плоскости. Докажите, что: а) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$; б) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Верны ли эти равенства не только для движения?

**Решение.** а) Изобразим условно фигуры $A$ и $B$ так, как на рисунке 80, *а*. Их общая часть — пересечение $A$ и $B$, обозначаемое $C = A \cap B$,— заштрихована.

Пусть в результате движения $f$ образом фигуры $A$ является фигура $A_1$, т. е. $A_1 = f(A)$, а образом фигуры $B$ — фигура $B_1$, т. е. $B_1 = f(B)$. Условно изобразим фигуры $A_1$ и $B_1$ на рисунке 80, *б*. Их общая часть $C_1$ — пересечение $A_1$ и $B_1$ — заштрихована.

Требуется доказать, что $f(C) = C_1$. В этом равенстве слева и справа стоят множества. Чтобы доказать равенство двух множеств, обычно доказывают два утверждения: 1) любой элемент из первого множества принадлежит второму множеству; 2) любой элемент из второго множества принадлежит первому множеству.

Докажем первое утверждение. Возьмем любую точку $X$ из множества $C = A \cap B$. Но тогда точка $X$ принадлежит и множеству $A$, и множеству $B$. Так как точка $X$ принадлежит множеству $A$, то ее образ $X_1$ принадлежит множеству $A_1$ (?). Точно так же точка $X_1$ принадлежит множеству $B_1$. Получилось, что точка $X_1$ принадлежит как множеству $A_1$, так и множеству $B_1$. Значит, она принадлежит их пересечению $C_1$.

Докажем второе утверждение. Пусть точка $Y_1$ принадлежит множеству $C_1 = A_1 \cap B_1$. Тогда она принадлежит как множеству $A_1$, так и множеству $B_1$. Любая точка из множества $A_1$ является образом некоторой точки, принадлежащей множеству $A$, поэтому прообраз точки $Y_1$ — точка $Y$— находится в множестве $A$. Точно так же он находится и в множестве $B$. Значит, точка $Y$ находится в множестве $C = A \cap B$.

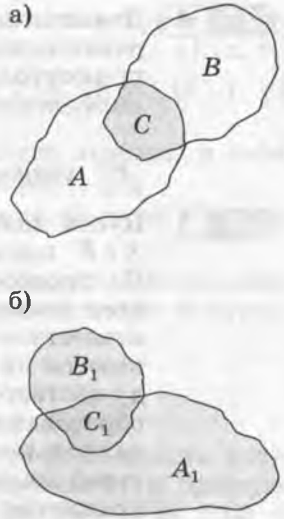


Рис. 80

А где в доказательстве использовалось, что $f$ — движение? А если это не понадобилось, то не будет ли это утверждение верно не только для движений, но и для других преобразований?

### Смотрим

**26.2** **4** Разделите на две равные части фигуру, показанную на рисунке 81.

### Доказываем

**26.3** **2** При некотором движении $f$ точка $A$ перешла в точку $B$, а точка $B$ — в точку $A$. Докажите, что в результате последовательного двукратного выполнения этих движений (т. е. композиции $f \circ f$) хотя бы одна из точек плоскости перейдет в себя.

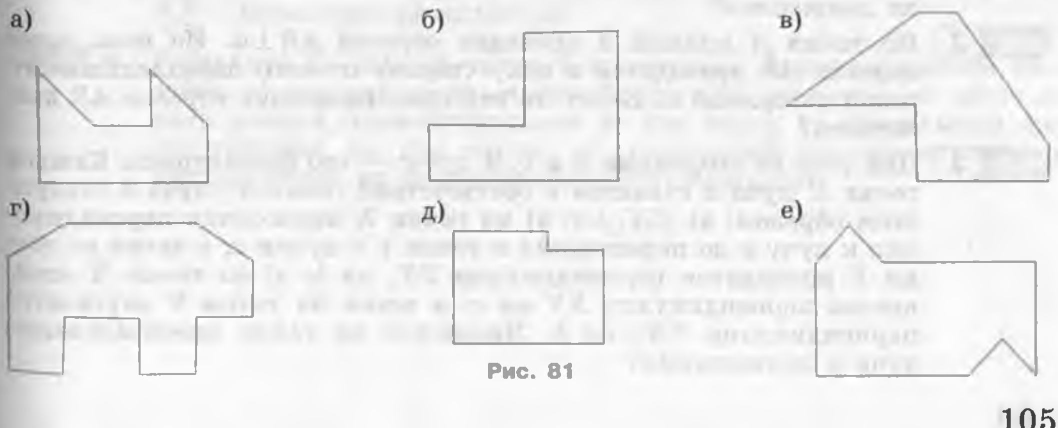


Рис. 81

**26.4** **4** Докажите, что равны: а) две прямые; б) два луча; в) два круга равных радиусов; г) два квадрата с равными сторонами; д) два прямоугольника с соответственно равными сторонами; е) две полуплоскости.

### Исследуем

**26.5** **1** Пусть даны прямая $a$ и некоторая фигура $F$. Из каждой точки $X \in F$ проводится перпендикуляр $XX_0$ на прямую $a$ ($X_0 \in a$). На продолжении этого перпендикуляра за прямую $a$ откладывается точка $X_1$, такая, что $X_0X_1 = 2XX_0$. Точкам $X$ ставятся в соответствие точки $X_1$, а точкам прямой $a$ — они сами. а) Сохраняются ли при таком преобразовании фигуры $F$ расстояния между соответствующими точками? б) Сохраняются ли при этом преобразовании величины углов? перпендикулярность прямых? параллельность прямых? в) Пусть фигура $F$ — отрезок. Какой фигурой является ее образ? г) Пусть фигура $F$ — треугольник. Сохраняется ли в результате такого преобразования его ориентация? д) Пусть фигура $F$ — вся плоскость. Как найти прообраз некоторой точки плоскости? е) Есть ли в этом преобразовании неподвижные точки?

**26.6** **1** Пусть в результате некоторого преобразования плоскости точка $A(x, y)$ переходит в точку $A_1(x_1, y_1)$. Ответьте на те же вопросы, что и в задаче 26.5, если:

а) $x_1 = \frac{1}{2}x,\ y_1 = y$; б) $x_1 = 2 - x,\ y_1 = y$;
в) $x_1 = x + 1,\ y_1 = y - 1$; г) $x_1 = 2x,\ y_1 = 2y$;
д) $x_1 = y,\ y_1 = x$.

**26.7** **1** Дана окружность единичного радиуса. Каждой точке $X$ плоскости (за исключением $O$ — центра окружности) поставим в соответствие такую точку $X_1$, которая лежит на луче $OX$ и при этом $OX_1 \cdot OX = 1$. Для такого преобразования плоскости ответьте на те же вопросы, что и в задаче 26.5.

**26.8** **2** При каких условиях проектирование отрезка на прямую является движением?

**26.9** **2** Из точки $A$ прямой $a$ проведен отрезок $AB \perp a$. Из всех точек отрезка $AB$ проводятся в одну сторону от него параллельные отрезки до прямой $a$. Будет ли это преобразование отрезка $AB$ движением?

**26.10** **2** Дан угол со сторонами $a$ и $b$, а луч $c$ — его биссектриса. Каждой точке $X$ луча $a$ ставится в соответствие точка $X_1$ луча $b$ следующим образом: а) $XX_1 \perp b$; б) из точки $X$ проводится перпендикуляр к лучу $a$ до пересечения в точке $Y$ с лучом $c$, а затем из точки $Y$ проводится перпендикуляр $YX_1$ на $b$; в) из точки $X$ опускается перпендикуляр $XY$ на $c$, а затем из точки $Y$ опускается перпендикуляр $YX_1$ на $b$. Являются ли такие преобразования луча $a$ движениями?

**26.11** **2** Является ли движением такое преобразование плоскости, которое каждой точке $(x, y)$ ставит в соответствие точку: а) $(x, 0)$; б) $(0, y)$; в) $(2x, 2y)$; г) $\left(2x, \frac{1}{2}y\right)$; д) $(x, -y)$; е) $(-x, y)$; ж) $(x+1, y)$; з) $(x, 1-y)$?

**26.12** **2** В результате некоторого преобразования фигура перешла в себя. Является ли такое преобразование движением?

**26.13** **4** Является ли движением любое преобразование фигуры $F$ в равную ей фигуру $F_1$?

**26.14** **4** Найдите признаки равенства: а) ромбов; б) параллелограммов; в) равнобоких трапеций; г) трапеций; д) произвольных четырехугольников; е) секторов; ж) сегментов.

### Рассуждаем

**26.15** **3** Объясните, почему в результате движения: а) окружность переходит в окружность; б) круг — в круг; в) прямая — в прямую; г) луч — в луч; д) полуплоскость — в полуплоскость; е) угол — в угол; ж) сохраняется параллельность прямых; з) параллелограмм переходит в параллелограмм; и) квадрат — в квадрат; к) правильный многоугольник — в правильный многоугольник; л) выпуклый многоугольник — в выпуклый многоугольник.

**26.16** **3** Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника $ABC$ каким-то движением. В какую точку треугольника $A_1B_1C_1$ переходит при этом движении: а) точка пересечения медиан треугольника $ABC$; б) точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$; в) точка пересечения высот треугольника $ABC$; г) центр круга, описанного около треугольника $ABC$?

**26.17** **3** Объясните, почему при любом движении круга: а) его центр переходит в центр; б) точка на окружности переходит в точку на окружности; в) диаметр переходит в диаметр; г) дуга переходит в дугу; д) полукруг переходит в полукруг; е) сегмент переходит в сегмент; ж) сектор переходит в сектор.

### Занимательная геометрия

**26.18** **4** Разделите на равные части и желательно большим числом способов: а) квадрат на две части; б) круг на две части; в) крест из двух равных прямоугольников на две части; г) правильный шестиугольник на три части; д) правильный шестиугольник на шесть частей, не являющихся треугольниками.

# § 27. Виды движений

Если на плоскости фигура $F'$ равна фигуре $F$, то существует некоторое движение, которое переводит $F$ в $F'$ (согласно определению равенства фигур). Оказывается, что на плоскости существует всего лишь четыре вида движений: 1) параллельный перенос (или, короче, перенос; рис. 82, *а*); 2) отражение в прямой (осевая симметрия; рис. 82, *б*); 3) поворот вокруг точки (рис. 82, *в*); 4) «скользящее отражение», состоящее из последовательно выполненных отражения в прямой и переноса вдоль этой прямой (т. е. являющееся композицией этих движений; рис. 82, *г*). Одним из этих движений и переводится $F$ в $F'$.

## 27.1. Перенос

Реальным примером фигур, полученных друг из друга параллельным переносом, являются одинаковые окна на фасаде дома (см. с. 97). Начертив на плане одно из окон, можно затем получить любое другое окно, сместив все точки первого в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Это свойство и определяет перенос.

**Определение.**

**Параллельным переносом** фигуры называется такое ее преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

Подробнее: параллельный перенос произвольным точкам $X$ и $Y$ фигуры сопоставляет такие точки $X'$ и $Y'$, что направленные отрезки

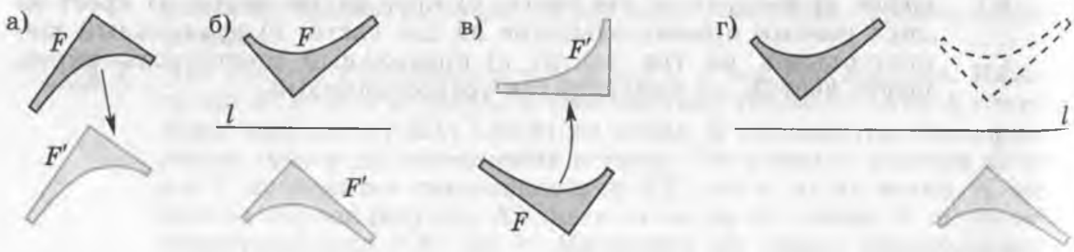



Рис. 82

$\overrightarrow{XX'}$ и $\overrightarrow{YY'}$ равны по длине и одинаково направлены, т. е. $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$ (рис. 83, *а*).

Равные направленные отрезки представляют один и тот же вектор. Поэтому можно сказать так: параллельный перенос — это преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются на один и тот же вектор — **вектор переноса.** *Параллельный перенос задается вектором переноса*: зная этот вектор, мы знаем, в какую точку перейдет любая точка переносимой фигуры.

Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ обозначается $T_{\vec{a}}$.

*Параллельный перенос является движением, которое сохраняет направления.* Действительно, пусть при параллельном переносе точки $X$ и $Y$ перешли в точки $X'$ и $Y'$. Тогда, как следует из определения переноса, выполняется равенство $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$ (рис. 83, *б*).

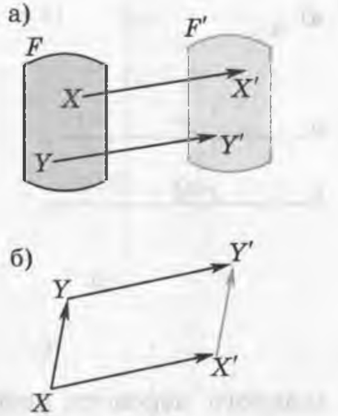


Рис. 83

Согласно признаку равенства векторов (теорема 24 п. 18.4) из равенства $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$ следует равенство $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$. Поэтому, во-первых, $X'Y'=XY$, т. е. параллельный перенос является движением, а во-вторых, из равенства $\overrightarrow{X'Y'}=\overrightarrow{XY}$ следует, что $\overrightarrow{X'Y'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{XY}$. Это означает, что параллельный перенос сохраняет направления. ■

Доказанное свойство параллельного переноса является характерным его свойством. А именно справедливо утверждение: *движение, сохраняющее направления, является параллельным переносом.* Переведите его на язык векторов и докажите самостоятельно.

## 27.2. Метод параллельного переноса

Преобразования упрощают решения многих геометрических задач. Основная идея метода геометрических преобразований в том, что фигура, рассматриваемая в условии задачи, преобразуется в такую, для которой решение становится проще. Решив задачу для преобразованной фигуры, затем обратным преобразованием возвращаются к исходной фигуре.

Вместе с тем применение каждого преобразования имеет свои особенности. Метод парал-

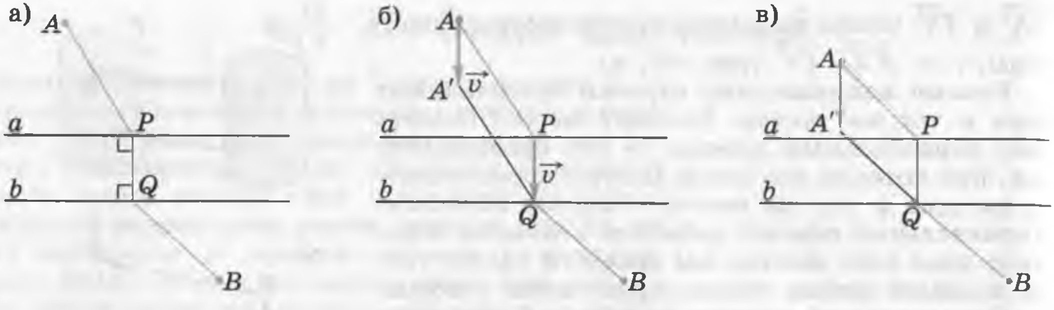



Рис. 84

лельного переноса позволяет сблизить удаленные друг от друга части фигуры и тем упростить задачу.

Вот пример такой задачи: где следует построить мост через реку, разделяющую пункты $A$ и $B$, чтобы путь $l=AP+PQ+QB$ был кратчайшим (рис. 84, *а*)? Берега реки считаются параллельными прямыми $a$ и $b$, а мост, естественно, строится перпендикулярно берегам реки.

**Решение.** Заметим, что длина отрезка $PQ$ не зависит от положения точки $P$ на прямой $a$, а вектор $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}$ определяется лишь прямыми $a$ и $b$ (рис. 84, *б*). Поэтому надо найти такое положение точки $P$, чтобы сумма $AP+QB$ была наименьшей. Пока отрезки $AP$ и $QB$ удалены друг от друга. Поэтому переведем отрезок $AP$ в положение $A'Q$ параллельным переносом на вектор $\vec{v}$. Получим ломаную $A'QB$. И теперь становится ясно, что длина ломаной $A'QB$, а значит, и длина $l$, будет наименьшей в том случае, когда точки $A'$, $Q$, $B$ лежат на одной прямой (рис. 84, *в*). Итак, $Q$ — точка пересечения отрезка $A'B$ с прямой $b$, а $P$ — проекция $Q$ на прямую $a$.

## 27.3. Отражение в прямой (Осевая симметрия)

Вы, конечно, знакомы с фигурами, имеющими ось симметрии. Сейчас мы дадим определения осевой симметрии и связанных с ней понятий.

**Точки $X$ и $X'$ называются симметричными относительно прямой $a$, и каждая из них —**

симметричной другой точке, если $a$ является серединным перпендикуляром отрезка $XX'$ (рис. 85, $a$). Каждая точка прямой $a$ считается симметричной самой себе (относительно $a$). Если дана прямая $a$, то каждой точке $X$ соответствует единственная точка $X'$, симметричная $X$ относительно $a$.

**Определение.**

**Отражением фигуры в прямой $a$** (или **осевой симметрией с осью $a$**) называется такое преобразование этой фигуры, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная ей относительно прямой $a$ (рис. 85, *б*).

Отражение плоскости в прямой $a$ обозначается $S_a$.

Фигура $F'$, полученная отражением фигуры $F$ в прямой $a$, называется **симметричной фигуре $F$ относительно прямой $a$**.

Поскольку симметричность точек относительно прямой взаимна, то и фигура $F$ симметрична фигуре $F'$ относительно прямой $a$, т. е. $F$ и $F'$ *симметричны относительно прямой* $a$. В частности, фигура $F$ может быть симметрична сама себе относительно некоторой прямой $a$ (рис. 85, *в*). Тогда говорят, что **фигура симметрична относительно прямой** $a$ и что прямая $a$ является ее **осью симметрии**.

*Отражение в прямой является движением.*

Чтобы доказать это, применим метод координат. Примем прямую $a$ за ось $x$ прямоугольных координат. Тогда отражение в ней сопоставит точке $(x, y)$ точку $(x, -y)$ (рис. 85, *г*).

Возьмем любые две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и рассмотрим симметричные им относительно оси $x$ точки $A'(x_1, -y_1)$ и $B'(x_2, -y_2)$. Вычислив расстояния $A'B'$ и $AB$, получим:

$$A'B' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Итак, отражение сохраняет расстояния, т. е. является движением. ■

Отражение в прямой можно наглядно представить как поворот вокруг этой прямой в пространстве. Именно представим себе часть плоскости с данной фигурой $F$ в виде пластинки, на-

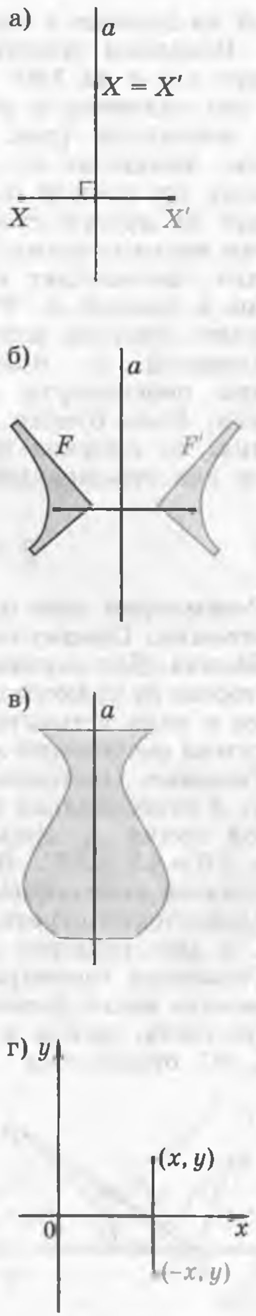



Рис. 85

детой на прямую $a$ как на ось. Повернем пластинку вокруг оси $a$ на 180° так, что она окажется в прежней плоскости (рис. 86). Точки, лежавшие по одну сторону от прямой $a$, перейдут на другую сторону на том же расстоянии от $a$. Значит, произойдет отражение в прямой $a$. Чтобы получить рисунок фигуры, отраженной в прямой, можно перевернуть лист бумаги. Если бумага прозрачна, то рисунок будет виден как отраженный.

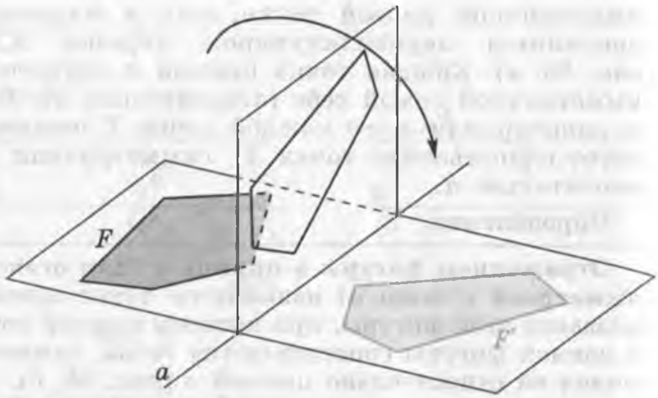


Рис. 86

## 27.4. Метод симметрии

Рассмотрим еще одну задачу о кратчайшем расстоянии. Сформулируем ее так:

**Задача.** Две деревни $A$ и $B$ находятся по одну сторону от прямого шоссе $a$. В какой точке $C$ на шоссе $a$ надо устроить остановку автобуса, чтобы сумма расстояний $AC+CB$ была кратчайшей?

**Решение.** Построим точку $B'$, симметричную точке $B$ относительно прямой $a$ (рис. 87, $a$). Для любой точки $X$ прямой $a$ $BX=B'X$. Поэтому $AX+XB=AX+XB'$. Ясно, что сумма $AX+XB'$ становится кратчайшей, когда $X$ попадает в точку пересечения отрезка $AB'$ с прямой $a$. Эта точка $C$ и дает решение задачи. ■

Решенная геометрическая задача позволяет объяснить такие физические явления, как отражение света, отскок мяча и т. п. Пусть световой луч $AC$ отражается от прямой $a$ в луч $CB$

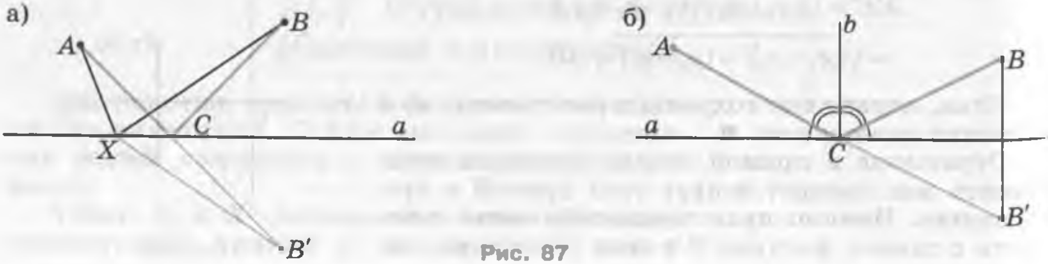


Рис. 87

(рис. 87, *б*). В физике рассматривают углы, которые отрезки $AC$ и $BC$ образуют с перпендикуляром $b$ к прямой $a$. По закону отражения света угол падения равен углу отражения. А это значит, что свет распространяется из точки $A$ в точку $B$ так, что путь $AC+CB$, а значит, и время его прохождения будут наименьшими. Это так называемый принцип Ферма. Из него вытекают все законы отражения и преломления света. По тому же закону происходят отскоки при упругих ударах (например, мячей, биллиардных шаров и т. п.).

## 27.5. Поворот

Каждый представляет себе, как повернуть плоский предмет вокруг какой-нибудь точки (например, стрелку часов), и нам нужно только описать это наглядное представление в понятиях геометрии (рис. 88, *а*).

Пусть дана точка $O$. На окружности с центром $O$ можно указать два направления обхода — по часовой стрелке и против нее (рис. 88, *б*). Этим задаются также два направления отсчета углов от идущих из точки $O$ лучей — по часовой стрелке и против нее.

**Поворот фигуры $F$ вокруг центра $O$ на данный угол $\varphi (0° \leqslant \varphi \leqslant 180°)$ в данном направлении** определяется так: каждой точке $X$ фигуры $F$ сопоставляется такая точка $X'$, что, во-первых, $OX'=OX$, во-вторых, $\angle X'OX=\varphi$ и, в-третьих, луч $OX'$ откладывается от луча $OX$ в заданном направлении (рис. 88, *в*).

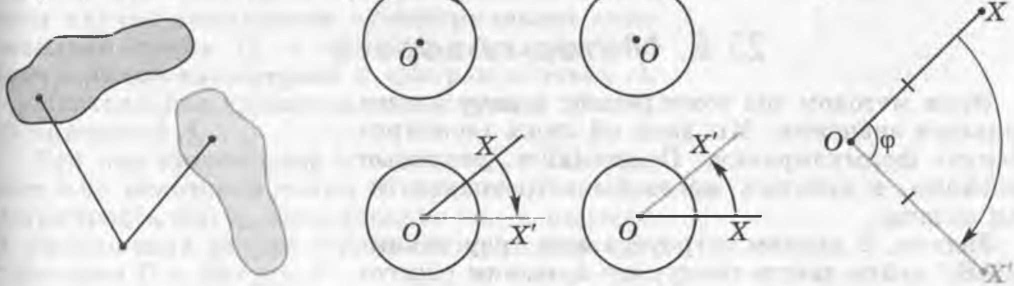



Рис. 88

Можно сказать, что все отрезки $OX$ поворачиваются на один и тот же угол в одну и ту же сторону. Если точка $O$ принадлежит фигуре $F$, то ей сопоставляется она сама. Точка $O$ называется **центром поворота**, а угол $\varphi$ — **углом поворота**.

**Теорема 32** *(о повороте)*.

---

**Поворот является движением.**

---

**Доказательство.** Пусть при повороте вокруг точки $O$ точкам $X$ и $Y$ сопоставляются точки $X'$ и $Y'$. Покажем, что $X'Y' = XY$.

Рассмотрим общий случай, когда точки $O$, $X$, $Y$ не лежат на одной прямой. Тогда $\angle X'OY' = \angle XOY$ (рис. 89, *а*). Действительно, пусть угол $XOY$ от $OX$ к $OY$ отсчитывается в направлении поворота. (Если это не так, то рассматриваем угол $YOX$.) Тогда угол между $OX$ и $OY'$ равен сумме угла $XOY$ и угла поворота (от $OY$ к $OY'$):

$$\angle XOY' = \angle XOY + \angle YOY'. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\angle XOY' = \angle XOX' + \angle X'OY'. \qquad (2)$$

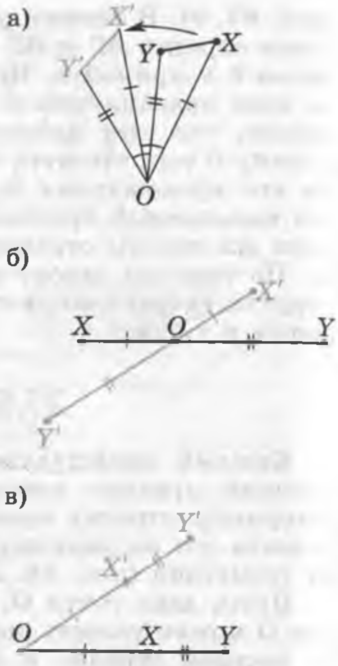



Рис. 89

Так как $\angle XOX' = \angle YOY'$ (как углы поворота), то из этого равенства и равенств (1) и (2) следует, что $\angle X'OY' = \angle XOY$. Кроме того, $OX' = OX$ и $OY' = OY$. Поэтому $\triangle X'OY' = \triangle XOY$. Следовательно, $X'Y' = XY$.

Если точки $X$, $O$, $Y$ лежат на одной прямой, то отрезки $XY$ и $X'Y'$ будут либо суммой, либо разностью равных отрезков $OX$, $OY$ и $OX'$, $OY'$ (рис. 89, *б*, *в*). Поэтому и в этом случае $X'Y' = XY$. Итак, поворот является движением. ■

## 27.6. Метод поворота

Этим методом мы тоже решим задачу о наименьшем значении. Мы даем ей лишь геометрическую формулировку. Придумайте реальные ситуации, в которых могла бы встретиться такая задача:

**Задача.** В данном остроугольном треугольнике $ABC$ найти такую точку, что сумма ее расстояний до вершин треугольника наименьшая.

**Решение.** Возьмем в треугольнике $ABC$ любую точку $X$ и рассмотрим сумму $l = XA + XB + XC$ (рис. 90, *а*). Чтобы найти наименьшее значение этой суммы, надо построить ломаную из отрезков $XA$, $XB$, $XC$. Для этого повернем $\triangle ABX$ вокруг точки $A$ в сторону от $\triangle ABC$ на 60°. Получим $\triangle AB'X' = \triangle ABX$. Рассмотрим ломаную $B'X'XC$. В ней $B'X' = BX$ и $X'X = XA$ (так как $\triangle AXX'$ равносторонний). Следовательно, $B'X' + X'X + XC = l$. И становится ясно, что $l$ достигает наименьшего значения тогда, когда точки $X'$ и $X$ лежат на отрезке $B'C$ (заметим, что положение точки $B'$ определено — она вершина равностороннего треугольника $ABB'$; рис. 90, *б*). В этом случае углы $AX'B'$ и $AXC$ — внешние углы равностороннего треугольника $AXX'$. Поэтому $\angle AXC = \angle AX'B' = 120°$. Так как $\angle AXB = \angle AX'B'$, то $\angle AXB = 120°$. А тогда и $\angle BXC = 120°$.

Итак, $l$ достигает наименьшего значения для такой точки $X$, из которой все стороны треугольника видны под равными углами. Эту точку $X$ легко построить на отрезке $B'C$, применив, например, параллельный перенос (рис. 90, *в*).

**Замечание.** Это решение пригодно лишь для треугольников, в которых все углы меньше 120°. Подумайте, где находится искомая точка, если это условие не выполняется. Добавим, что ее иногда называют точкой Торричелли.

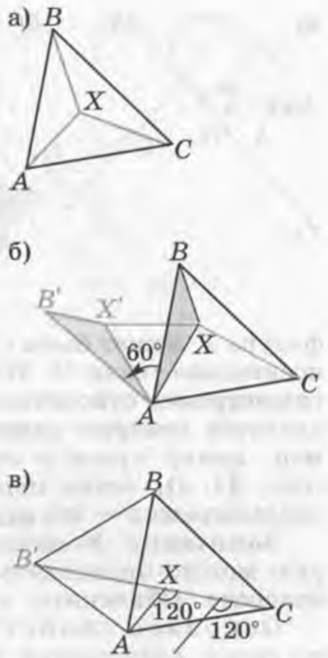



Рис. 90

## 27.7. Центральная симметрия

Особый случай представляет поворот на 180°. Если $O$ — центр такого поворота, то, чтобы построить точку $X'$, соответствующую точке $X$, достаточно продолжить отрезок $XO$ за точку $O$ на отрезок $OX' = OX$ (рис. 91, *а*). Точки $X$ и $X'$ в этом случае называются **симметричными относительно точки** $O$, а само преобразование — **центральной симметрией с центром в точке** $O$.

Центральная симметрия с центром в точке $O$ обозначается $S_O$.

Так как симметричность точек $X$ и $X'$ относительно некоторой точки $O$ взаимна, то и симметричность фигур относительно точек взаимна. А именно если фигура $F$ перешла при симметрии с центром $O$ в фигуру $F'$, то и $F'$ при этой симметрии перешла в $F$ (рис. 91, *б*). В частности,

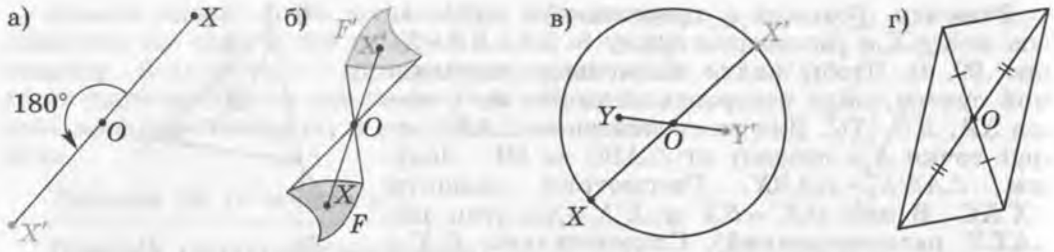



Рис. 91

фигура $F$ может быть симметрична сама себе относительно точки $O$. Тогда говорят, что **фигура $F$ симметрична относительно точки $O$** и что точка $O$ является **центром симметрии фигуры $F$**. Например, центр круга — это его центр симметрии (рис. 91, *в*), точка пересечения диагоналей параллелограмма — его центр симметрии (рис. 91, *г*).

**Замечание.** Конечно, центральную симметрию можно определить и не используя понятие поворота. Объясните, как это сделать.

Основное свойство центральной симметрии содержится в следующем утверждении: *центральная симметрия является движением, изменяющим направления на противоположные.* На языке векторов это значит, что когда точкам $X$ и $Y$ при центральной симметрии соответствуют точки $X'$ и $Y'$, то

$$\overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{XY}. \qquad (3)$$

**Доказательство.** Пусть при центральной симметрии с центром в точке $O$ точки $X$ и $Y$ перешли в точки $X'$ и $Y'$ (рис. 92). Поскольку точка $O$ — середина отрезка $XX'$, то

$$\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX}. \qquad (4)$$

Аналогично

$$\overrightarrow{OY'} = -\overrightarrow{OY}. \qquad (5)$$

Находим вектор $\overrightarrow{X'Y'}$, учитывая равенства (4) и (5):

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX} = -(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = -\overrightarrow{XY}.$$

Равенство (3) доказано. ■

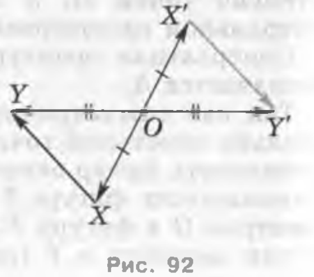



Рис. 92

Доказанное свойство является характерным свойством центральной симметрии. А именно справедливо обратное утверждение — признак центральной симметрии: *движение, изме-*

*няющее направления на противоположные, является центральной симметрией.*

**Доказательство.** Пусть $f$ — движение, изменяющее направления на противоположные. Пусть $f$ переводит точку $X$ в точку $X'$ и точка $O$ — середина отрезка $XX'$. Покажем, что $f$ — симметрия с центром в точке $O$. Возьмем любую точку $Y$, и пусть $Y' = f(Y)$. По условию имеет место равенство (3). Кроме того, так как $O$ — середина отрезка $XX'$, то имеет место и равенство (4). Учитывая (3) и (4), получаем, что

$$\overrightarrow{OY'} = \overrightarrow{OX'} + \overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{XY} = -(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY}) = -\overrightarrow{OY}.$$

Равенство $\overrightarrow{OY'} = -\overrightarrow{OY}$ означает, что точка $O$ — середина и отрезка $YY'$. Так как $Y$ — любая точка, то $f$ — симметрия с центром в точке $O$. ■

**Замечание.** Сравните этот признак центральной симметрии с признаком параллельного переноса (п. 27.1).

Методом центральной симметрии легко решается такая задача: *построить отрезок, концы которого лежат на данных фигурах $F_1$ и $F_2$, а середина находится в данной точке $O$* (рис. 93). Чтобы построить такой отрезок, можно построить фигуру $F_2'$, симметричную фигуре $F_2$ относительно точки $O$. Пусть $A$ — точка пересечения фигур $F_1$ и $F_2'$. Тогда симметричная ей (относительно $O$) точка $B$ принадлежит фигуре $F_2$.

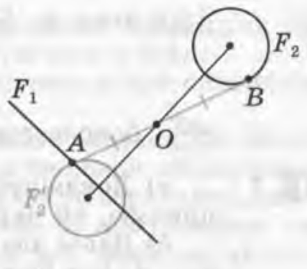


Рис. 93

Поскольку точка $O$ — середина отрезка $AB$, то отрезок $AB$ является решением задачи. ■

Частным случаем решенной задачи является такая задача: *через точку $A$ внутри угла провести отрезок, концы которого лежат на сторонах этого угла, а серединой является данная точка $A$* (рис. 94). Докажите, что среди всех прямых, проходящих через точку $A$, прямая, которая содержит отрезок $BC$, отсекает треугольник наименьшей площади.

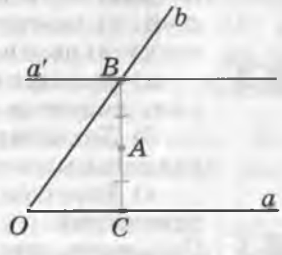


Рис. 94

## Вопросы

1. Какие вы знаете движения плоскости?
2. Что такое параллельный перенос и каковы его свойства?
3. Что такое отражение в прямой и каковы его свойства?
4. Что такое поворот и каковы его свойства?
5. Что такое центральная симметрия и каковы ее свойства?
6. Что значат такие фразы: «Фигура имеет ось симметрии», «Фигура имеет центр симметрии»?

# Задачи к § 27

## Дополняем теорию

27.1 1 а) Докажите, что в результате переноса прямая переходит в прямую, ей параллельную, или в себя.

б) Даны две параллельные прямые. Каким переносом одна из них может быть получена из другой?

в) Даны два равных и параллельных отрезка. Каким переносом один из них может быть получен из другого?

г) Докажите, что в результате переноса вектор переходит в равный вектор.

27.2 2 Докажите, что перенос на вектор $\vec{a}=(x_0,\ y_0)$ записывается по формулам $x_1=x+x_0$, $y_1=y+y_0$, где $(x,\ y)$ — исходная точка, а $(x_1,\ y_1)$ — ее образ.

27.3 1 Докажите, что: а) преобразование, обратное переносу, является переносом; б) последовательное выполнение двух переносов является переносом.

27.4 3 Докажите, что: а) если прямая параллельна оси симметрии, то симметричная ей прямая также параллельна этой оси; б) если прямая пересекает ось симметрии, то симметричная ей прямая пересекает эту ось, причем в той же точке, что и исходная прямая; в) если прямая перпендикулярна оси симметрии, то она в результате этой симметрии совмещается сама с собой.

27.5 3 Запишите в координатах: а) симметрию относительно оси $x$; б) симметрию относительно оси $y$; в) симметрию относительно прямой $x=a$; г) симметрию относительно прямой $y=b$; д) симметрию относительно прямой $y=x$.

27.6 3 а) Докажите, что преобразование, обратное осевой симметрии, является осевой симметрией.

б) Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельным переносом.

в) Разложите данный перенос на композицию двух осевых симметрий.

27.7 5 Докажите, что один из углов между прямой и ее образом, полученным в результате поворота, равен углу поворота.

27.8 5 а) Докажите, что преобразование, обратное повороту, является поворотом.

б) Докажите, что композиция двух поворотов с общим центром является поворотом. Чему равен угол этого поворота?

27.9 5 а) Две прямые пересекаются. Докажите, что композиция двух отражений в этих прямых является поворотом.

б) Заданный поворот разложите на композицию двух отражений.

27.10 5 Запишите в координатах поворот вокруг начала координат на угол: а) $90°$; б) $\varphi$.

**27.11** 7 а) Докажите, что в результате центральной симметрии прямая переходит в параллельную ей прямую или в себя.

б) Две прямые параллельны. Какой центральной симметрией одна из них получается из другой?

в) Нарисуйте два равных и параллельных отрезка. Докажите, что один можно получить из другого центральной симметрией.

**27.12** 7 Докажите, что: а) преобразование, обратное центральной симметрии, является центральной симметрией; б) композиция двух центральных симметрий с одним и тем же центром является тождественным преобразованием.

**27.13** 7 Запишите в координатах центральную симметрию относительно: а) точки $O$; б) точки $A(x_0,\ 0)$; в) точки $B(0,\ y_0)$; г) точки $C(x_0,\ y_0)$.

### Рисуем

**27.14** 1 Нарисуйте образ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$.

**27.15** 1 Нарисуйте образ правильного тетраэдра $ABCD$ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AK}$, где точка $K$ — середина $BC$; г) $\overrightarrow{DQ}$, где точка $Q$ — центр треугольника $ABC$.

**27.16** 3 Нарисуйте симметричные относительно двух прямых: а) два отрезка; б) два многоугольника.

**27.17** 3 Нарисуйте отрезок. Нарисуйте отрезок, симметричный ему относительно прямой: а) содержащей его; б) проходящей через его конец; в) проходящей через точку внутри его; г) параллельной ему; д) проходящей мимо него и не параллельной ему.

**27.18** 5 Нарисуйте отрезок $AB$. Нарисуйте его образ в результате поворота: а) вокруг $A$ на $120°$ по часовой стрелке; б) вокруг $B$ на $60°$ против часовой стрелки; в) вокруг середины отрезка на $45°$ по часовой стрелке; г) вокруг точки $O$, лежащей на серединном перпендикуляре к отрезку, на $90°$ против часовой стрелки.

**27.19** 7 Нарисуйте ломаную, которая идет по поверхности куба. Нарисуйте три проекции ломаной, центрально-симметричной данной относительно точки пересечения диагоналей куба.

**27.20** 7 Нарисуйте правильный тетраэдр. Нарисуйте его образ, полученный в результате центральной симметрии относительно: а) вершины; б) середины ребра; в) центра основания; г) середины отрезка, соединяющего вершину с центром противоположной грани.

Составьте аналогичные задачи про куб.

### Планируем

**27.21** 2 Нарисуйте систему координат, точки $A(2,\ 2)$ и $B(4,\ -4)$ и полосу между осью $x$ и прямой $y=1$. а) Как найти точки $K$ и $L$ на краях полосы, такие, чтобы ломаная $AKLB$ была кратчайшей? б) Как найти координаты точек $K$ и $L$? в) Решите задачи «а» и «б» для полосы между осью $x$ и прямой $y=-1$.

**27.22** **4** а) В системе координат даны две точки $A(2, 1)$ и $B(3, 3)$. Как найти точку $K$ на оси $x$, такую, что ломаная $AKB$ кратчайшая? Как вычислить координаты точки $K$ и длину этой ломаной?

б) Решите задачу «а» для точки $L$ на оси $y$.

**27.23** **4** а) Прямая $a$ параллельна прямой $AB$. Как найти на прямой $a$ точку $X$, такую, что ломаная $AXB$ является кратчайшей?

б) Как вы решите задачу «а», если прямые $a$ и $AB$ не будут параллельными, причем отрезок $AB$ будет лежать по одну сторону от $a$?

**27.24** **6** Внутри острого угла $O$ величиной $\varphi$ взяты точки $A$ и $B$. Пусть $A_1$ и $A_2$ — проекции точки $A$ на стороны угла, а $B_1$ и $B_2$ — проекции точки $B$ на стороны угла. (Точки $A_1$ и $B_1$ на одной стороне, а точки $A_2$ и $B_2$ на другой.) Как найти угол между $A_1A_2$ и $B_1B_2$?

## Находим величину

**27.25** **1** Нарисуйте отрезок $AB$. Нарисуйте его образ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{AC}$ при условии, что точка $C$ не лежит на прямой $AB$. Какую фигуру «заметает» при этом переносе отрезок $AB$? Чему равна площадь этой фигуры, если $AB = AC = 1$, $\angle CAB = \varphi$?

**27.26** **1** Равносторонний треугольник $ABC$ со стороной 2 подвергается переносу. Рассмотрим две фигуры: объединение $F_1$ и пересечение $F_2$ исходного и полученного треугольников. Вычислите периметр и площадь $F_1$ и $F_2$, если перенос задан: а) вектором $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; б) вектором $\overrightarrow{BO}$, где $O$ — центр треугольника.

**27.27** **1** В результате переноса система координат с началом в точке $O$ перешла в систему координат с началом в точке $O_1$, которая в старой системе координат имела координаты (2, 1). а) Какие координаты в новой системе координат будут у точки, которая раньше имела координаты (−5, 4)? б) Какие координаты имела точка, которая теперь имеет координаты (−4, −3)? в) Решите эту задачу в общем виде.

**27.28** **3** Нарисуйте равносторонний треугольник. Отразите его от: а) средней линии; б) прямой, перпендикулярной стороне и проходящей через середину другой стороны.

Нарисуйте объединение исходного и полученного треугольников. Вычислите его периметр и площадь, если сторона треугольника равна 2.

**27.29** **3** В круге с центром $O$ радиусом 6 проведена хорда $AB$ на расстоянии 3 от центра. Отразите круг от прямой $AB$. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кругов. Вычислите их периметр и площадь.

**27.30** **3** Отразите прямоугольник от прямой, проходящей через его диагональ. Нарисуйте объединение исходного и полученного прямоугольников. Чему равны его периметр и площадь, если стороны прямоугольника равны $a$ и $b$?

**27.31** **5** Нарисуйте квадрат $ABCD$. Нарисуйте его образ в результате поворота по часовой стрелке: а) вокруг точки $A$ на 135°; б) вокруг точки $B$ на 90°; в) вокруг точки $C$ на 45°; г) вокруг точки $D$ на 30°; д) вокруг центра квадрата на 45°.

Пусть площадь данного квадрата равна $S$. В каждом из случаев «в», «г», «д» найдите площадь объединения исходного и полученного квадратов.

**27.32** **5** Нарисуйте равносторонний треугольник $ABC$. Нарисуйте его образ в результате поворота против часовой стрелки: а) вокруг точки $C$ на 30°; б) вокруг середины $AC$ на 90°; в) вокруг центра треугольника на 30°; г) вокруг центра треугольника на 90°.

Пусть площадь данного треугольника равна $S$. В каждом случае найдите площадь объединения исходного и полученного треугольников.

**27.33** **5** Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1 повернули на угол 45° относительно вершины прямого угла. Чему равна площадь общей части исходного и полученного треугольников?

Решите задачу в общем случае, рассматривая поворот на угол $\varphi$.

**27.34** **5** Ромб с острым углом $\varphi$ и стороной 1 повернули вокруг центра на 90°. Чему равна площадь пересечения исходного и полученного ромбов?

**27.35** **7** Нарисуйте треугольник, центрально-симметричный данному равностороннему треугольнику относительно: а) середины высоты; б) центра.

Пусть сторона данного треугольника равна 1. Вычислите периметр и площадь пересечения и объединения исходного и полученного треугольников.

**27.36** **7** В круге с центром $O$ радиусом 4 взята точка $A$, удаленная от центра на 2. Нарисуйте образ этого круга в результате центральной симметрии относительно $A$. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кругов. Вычислите их периметры и площади.

## Выводим уравнение

**27.37** **1** В результате переноса система координат с началом в точке $O$ перешла в систему координат с началом в точке $O_1$, которая в старой системе координат имела координаты (2, 1). а) Какие уравнения будут у тех фигур, которые раньше задавались такими уравнениями: 1) $x=2$; 2) $y=-2$; 3) $y=x$; 4) $y=-2x+3$; 5) $x^2+y^2=1$? б) Какие уравнения были у тех фигур, которые теперь задаются уравнениями, указанными в «а»? в) Изменяются ли координаты вектора в результате переноса системы координат?

Решите задачи «а» — «в» в общем виде.

**27.38** **5** Рассмотрим поворот вокруг начала координат на 90°. Найдите образ: а) точки $A(1, 1)$; б) прямой $x=-2$; в) прямой $y=2x$; г) прямой $y=-x+1$; д) окружности $(x-1)^2+(y+1)^2=1$.

**27.39** **5** Пусть систему координат повернули на угол $\varphi$ вокруг точки $O$. Какими будут теперь: а) координаты точки $A(1, 1)$; б) уравнение прямой $y = 3$; в) уравнение прямой $y = -x$; г) уравнение прямой $2x - 3y = 1$; д) уравнение окружности $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$?

## Доказываем

**27.40** **2** Используя перенос, докажите свойства средней линии: а) треугольника; б) трапеции.

**27.41** **2** Две равные окружности имеют точку касания $K$. Докажите, что: а) любая прямая, пересекающая их в точке $K$, пересекает их по равным хордам; б) если $\angle AKB = 90°$ (где точки $A$ и $B$ лежат на разных окружностях), то отрезок $AB$ равен диаметру окружностей.

**27.42** **2** Нарисуйте любой треугольник. Нарисуйте его образ при переносе на какой-либо вектор. В результате переноса каждая его сторона «заметает» некоторую площадь. Докажите, что бо́льшая из этих площадей равна сумме меньших. Используйте этот результат для доказательства теоремы Пифагора.

**27.43** **2** Докажите, что в любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить треугольник, площадь которого не меньше чем $\frac{1}{4}$. Сможете ли вы улучшить эту оценку?

**27.44** **4** График некоторой функции имеет две оси симметрии, перпендикулярные оси $x$. Докажите, что она является периодической. Верно ли обратное?

**27.45** **6** Докажите, что в одной окружности равные хорды: а) равноудалены от центра; б) видны из центра под равными углами; в) соединяют концы равных дуг; г) отсекают от круга равные сегменты.

Проверьте обратные утверждения.

**27.46** **6** Центр окружности совпадает с центром правильного треугольника, а сама она пересекает его стороны. Докажите, что полученные при этом хорды будут равны. Проверьте обратное. Обобщите данное утверждение.

**27.47** **6** На отрезке $AB$ выбрана точка $C$. По одну сторону от прямой $AB$ построены равносторонние треугольники $ACK$ и $BCL$. Докажите, что точка $C$ и середины отрезков $KB$ и $LA$ являются вершинами равностороннего треугольника.

**27.48** **7** Даны две равные окружности. Через середину отрезка, соединяющего их центры, проведена прямая. Докажите, что если она касается одной окружности, то касается и другой; если она пересекает одну окружность, то пересекает и другую, причем полученные хорды равны. Проверьте обратное.

**27.49** **7** а) Используя центральную симметрию, докажите теоремы: 1) о средней линии треугольника; 2) о средней линии трапеции; 3) о площади трапеции.

б) Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, имеющих с ней общую вершину.

**27.50** **7** В треугольнике медиана и биссектриса совпадают. Используя центральную симметрию, докажите, что такой треугольник равнобедренный.

**27.51** **7** На прямой расположены точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, идущие по порядку возрастания номеров, причем $A_1A_2 = A_3A_4$. Докажите, что для любой точки $X$ плоскости выполняется неравенство $XA_1 + XA_4 \geqslant XA_2 + XA_3$.

## Исследуем

**27.52** **1** а) Существуют ли точки, неподвижные для данного переноса?

б) Существуют ли прямые, неподвижные для данного переноса?

**27.53** **2** Стороны двух углов соответственно параллельны. Как расположены биссектрисы этих углов?

**27.54** **2** В выпуклом четырехугольнике средняя линия двух сторон равна полусумме двух других сторон. Какого вида этот четырехугольник? Какого вида будет четырехугольник, если и другая средняя линия обладает тем же свойством?

**27.55** **2** а) Основания двух равнобедренных треугольников находятся на одной прямой, а сами они лежат по одну сторону от этой прямой. Существует ли прямая, которая пересекает их по равным хордам?

б) Оси симметрии двух равнобедренных треугольников находятся на одной прямой. Существуют ли в них два параллельных и равных отрезка?

**27.56** **2** Внутри угла движется точка так, что: а) сумма расстояний от нее до сторон угла постоянна; б) разность расстояний от нее до сторон угла постоянна. По какой линии движется точка?

**27.57** **3** а) Есть ли у осевой симметрии неподвижные точки? неподвижные прямые?

б) Может ли композицией двух осевых симметрий быть осевая симметрия?

**27.58** **3** Два отрезка симметричны относительно некоторой прямой. Верно ли, что их концы лежат на одной окружности?

**27.59** **3** Вектор $\vec{b}$ получен из вектора $\vec{a}$ отражением в прямой. Как расположен по отношению к этой прямой вектор: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$?

**27.60** **3** Два симметричных относительно прямой треугольника, вообще говоря, нельзя совместить непрерывным движением в плоскости. Но в некоторых случаях можно. В каких? В общем же случае можно данные треугольники совместить по частям, полученным в результате их разрезания. Как это сделать?

**27.61** **3** а) Из точки $A(0, 2)$ на ось $x$ направлен луч света. 1) Пусть он отражается от нее в точке $(2, 0)$. Пройдет ли отраженный луч через точку $(3, 1)$? через точку $(5, 3)$? 2) В какую точку оси $x$ его надо направить, чтобы отраженный луч прошел через точку $(2, 2)$? через точку $(-3, 3)$?

б) Решите задачу «а», если дана точка $A(1, 2)$.

**27.62** **4** Даны два единичных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярные между собой. Возьмем любой вектор $\vec{x}$. Сможете ли вы выразить через векторы $\vec{b}$ и $\vec{x}$ вектор, симметричный вектору $\vec{x}$ относительно прямой, проходящей через вектор $\vec{a}$?

**27.63** **5** Есть ли у поворота неподвижные точки? неподвижные прямые?

**27.64** **3** а) На сторонах равностороннего треугольника $ABC$ взяты точки: $C_1$ на $AB$, $B_1$ на $AC$, $A_1$ на $BC$. При этом $AC_1 = BA_1 = CB_1$. Вершинами какого по виду треугольника являются эти точки? Пусть теперь проведены отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ и точки $K$, $L$, $M$ — точки пересечения этих отрезков. Вершинами какого по виду треугольника являются эти точки?

б) Составьте задачу, аналогичную задаче «а», для квадрата.

в) Обобщите задачи «а» и «б» для правильного многоугольника.

**27.65** **1** Вокруг равностороннего треугольника описана окружность. По ней движется точка. В любой момент времени известно расстояние от нее до двух вершин треугольника. Сможете ли вы найти расстояние до третьей вершины?

**27.66** **6** На сторонах остроугольного треугольника $ABC$ вне его построены равносторонние треугольники $ABC_1$, $BCA_1$, $CAB_1$. а) Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$ и прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке. Пусть точка $O$ — точка их пересечения. Сможете ли вы найти $OA_1$, если известны $OB$ и $OC$? б) Сможете ли вы восстановить исходный треугольник, зная положение точек $A_1$, $B_1$, $C_1$?

**27.67** **7** Есть ли у центральной симметрии неподвижные точки? неподвижные прямые?

**27.68** **7** Отрезки $AB$ и $CD$ центрально-симметричны. Верно ли, что отрезки $AC$ и $BD$ центрально-симметричны?

**27.69** **7** Фигура $F_2$ центрально-симметрична фигуре $F_1$. Будет ли центрально-симметричным их пересечение? объединение?

## Строим

**27.70** **2** Постройте трапецию по: а) четырем сторонам; б) основаниям и диагоналям.

**27.71** **2** Постройте прямую, которая пересекает по равным хордам: а) два равных круга; б) два произвольных круга и при этом проходит через данную точку.

**27.72** **2** Постройте четырехугольник по: а) четырем сторонам и двум средним линиям; б) четырем углам и двум противоположным сторонам.

**27.73** **4** Постройте треугольник с наименьшим периметром: а) одна вершина которого находится в данной точке внутри угла, а две другие — на сторонах угла; б) вершины которого лежат на сторонах данного треугольника.

**27.74** **7** Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.

**27.75** **7** Через точку внутри угла проведите такую хорду угла, которая делится этой точкой пополам.

**27.76** **7** Через точку внутри угла проведите хорду угла, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

### Применяем геометрию

**27.77** **3** Два зеркала образуют угол. Из точки внутри его надо направить луч так, чтобы, отразившись от двух сторон угла, он вернулся в ту же точку. Как это сделать?

**27.78** **3** Некий биллиардный стол имеет острый угол $BAC$. Шар, ударившись о его борт $AB$, а потом отразившись от него и от борта $AC$, покатился в некотором направлении. Какой угол он будет составлять с первоначальным направлением движения шара до того, как он ударился о борт $AB$?

**27.79** **3** Может ли человек в карманном зеркальце увидеть себя во весь рост?

**27.80** **3** а) При каком условии вы можете увидеть в озере отражение облака?

б) При каком условии вы в горизонтальном зеркале можете увидеть вертикальный предмет целиком?

### Занимательная геометрия

**27.81** **4** Федя нарисовал равносторонний треугольник. На каждой его стороне он построил квадраты вне этого треугольника, а затем построил их центры. Вася стер этот рисунок, оставив только эти центры. Можно ли восстановить исходный рисунок? А если исходный треугольник будет произвольным?

### Участвуем в олимпиаде

**27.82** **4** Точка $M$ — середина стороны $BC$ выпуклого четырехугольника $ABCD$, $\angle AMD = 120°$. Докажите, что $AB + 0{,}5BC + CD \geqslant DA$.

**27.83** **4** Равносторонний треугольник $ABC$ отражают симметрично относительно одной из сторон. Полученный треугольник снова отражают и т. д. Докажите, что если треугольник попал на исходное место, то его вершины заняли исходное положение (точка $A$ попала на прежнее место, точки $B$ и $C$ — тоже).

**27.84** **4** На окружности выбрано 6 различных точек $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ так, что хорда $AB$ параллельна хорде $DE$, а хорда $DC$ параллельна хорде $AF$. Докажите, что хорда $BC$ параллельна хорде $EF$.

**27.85** **6** На сторонах треугольника $ABC$ как на гипотенузах строятся во внешнюю сторону равнобедренные прямоугольные треугольники $ABD$, $BCE$ и $ACF$. Докажите, что отрезки $DE$ и $BF$ равны и взаимно перпендикулярны.

**27.86** **6** На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ вне его построены квадраты $ABDE$ и $BCKL$ с центрами $O_1$ и $O_2$. Точки $M_1$ и $M_2$ — середины отрезков $DL$ и $AC$. Докажите, что $O_1M_1O_2M_2$ — квадрат.

**27.87** **6** Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка $M$ — середина отрезка $CD$, точка $K$ — середина отрезка $DE$, $L$ — точка пересечения отрезков $AM$ и $BK$. Докажите, что площади треугольника $ABL$ и четырехугольника $MDKL$ равны, и найдите величину угла между прямыми $AM$ и $BK$.

**27.88** **6** Докажите, что если многоугольник с нечетным числом сторон вписан в окружность и все его углы равны, то такой многоугольник правильный.

**27.89** **7** В треугольнике $ABC$ проведена высота $AD$ на основание $BC$. Известно, что $AC > AB$. Докажите, что $DC - DB > AC - AB$.

**27.90** **7** Фигура $F$ есть объединение всех образов треугольника $ABC$ при симметрии с центром $O$, где $O$ — любая точка ломаной $BAC$. Найдите площадь фигуры $F$, если площадь треугольника $ABC$ равна $S$.

**27.91** **7** Для каждых двух точек плоскости $A$ и $B$ обозначим через $A*B$ точку, симметричную точке $A$ относительно точки $B$. Даны три вершины квадрата. Можно ли, применив несколько раз операцию $*$, получить четвертую вершину этого квадрата?

# § 28. Классификация движений

В этом параграфе мы докажем утверждение, сформулированное в начале предыдущего параграфа: каждое движение плоскости является либо переносом, либо поворотом, либо осевой симметрией, либо композицией осевой симметрии и переноса в направлении оси симметрии. Эта теорема была доказана в XIX в. французским математиком Мишелем Шалем (1793—1880). Для ее доказательства мы установим ряд общих свойств движений и введем некоторые понятия.

## 28.1. Теоремы о задании движений

В этом пункте мы дадим ответ на такой вопрос: образы скольких точек фигуры $M$ при ее движении достаточно задать, чтобы определились образы и остальных ее точек? Оказывается, что достаточно знать образы трех точек, не лежащих на одной прямой. Сначала решим вопрос о единственности движения фигуры с таким условием.

**Теорема 33** *(о единственности движения).*

---

**Пусть у двух движений $f$ и $g$ фигуры $M$ образы некоторых трех точек $A$, $B$, $C$, не лежащих на одной прямой, совпадают, т. е. $f(A)=g(A)=A_1$, $f(B)=g(B)=B_1$ и $f(C)=g(C)=C_1$. Тогда движения $f$ и $g$ совпадают, т. е. $f(X)=g(X)$ для любой точки $X$ фигуры $M$.**

---

**Доказательство.** Возьмем любую точку $X$ фигуры $M$. Пусть $X_1=f(X)$ и $X_2=g(X)$. Покажем, что точки $X_1$ и $X_2$ совпадают. Допустим, что $X_1$ и $X_2$ — различные точки. Так как $f$ и $g$ — движения, то $X_1A_1=XA$ и $X_2A_1=XA$. Поэтому $A_1X_1=A_1X_2$, т. е. точка $A_1$ равноудалена от точек $X_1$ и $X_2$. Следовательно, точка $A_1$ лежит на серединном перпендикуляре отрезка $X_1X_2$ — прямой $l$ (рис. 95). Но точно так же можно доказать, что и точка $B_1$, и точка $C_1$ лежат на прямой $l$ — серединном перпендикуляре отрезка $X_1X_2$.

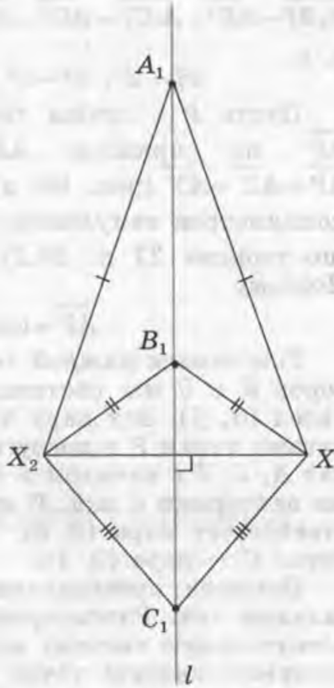


Рис. 95

Итак, мы получили, что точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой $l$. Это невозможно, так как движение $f$ (а также и $g$) переводит три точки $A$, $B$, $C$, не лежащие на одной прямой, в точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, также не лежащие на одной прямой. Это противоречие получилось из-за предположения, что $X_1$ и $X_2$ — различные точки. Итак, $X_1$ и $X_2$ совпадают, т. е. движения $f$ и $g$ совпадают. ■

Следующая теорема дает полный ответ на поставленный вопрос.

**Теорема 34** *(о задании движения).*

---

**Пусть на плоскости заданы два равных треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$, причем**

$$A_1B_1=AB,\ A_1C_1=AC,\ B_1C_1=BC. \qquad (1)$$

**Тогда существует такое движение плоскости, которое переводит точку $A$ в $A_1$, точку $B$ в $B_1$, точку $C$ в $C_1$.**

---

**Доказательство.** Введем векторы $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{u}_1=\overrightarrow{A_1B_1}$, $\vec{v}_1=\overrightarrow{A_1C_1}$. В силу равенства треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ имеем равенства скалярных произведений:

$$\overrightarrow{A_1B_1}^2=\overrightarrow{AB}^2,\ \overrightarrow{A_1C_1}^2=\overrightarrow{AC}^2,\ \overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}, \quad (2)$$

т. е.

$$\vec{u}_1^2=\vec{u}^2,\ \vec{v}_1^2=\vec{v}^2,\ \vec{u}_1\cdot\vec{v}_1=\vec{u}\cdot\vec{v}. \quad (3)$$

Пусть $P$ — любая точка. Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по прямым $AB$ и $AC$. Получим $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{AY}$ (рис. 96, *а*). Так как вектор $\overrightarrow{AX}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{u}$, то $\overrightarrow{AX}=\alpha\vec{u}$ (по теореме 27 п. 20.2). Аналогично $\overrightarrow{AY}=\beta\vec{v}$. Поэтому

$$\overrightarrow{AP}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}. \quad (4)$$

Тем самым каждой точке $P$ с помощью векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ мы поставили в соответствие пару чисел $(\alpha, \beta)$. Эту пару чисел называют координатами точки $P$ **в косоугольной системе координат** $A$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ с началом в точке $A$ и координатными векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$. В этой системе точке $A$ соответствует пара $(0, 0)$, точке $B$ — пара $(1, 0)$, точке $C$ — пара $(0, 1)$.

Искомое преобразование плоскости теперь зададим так. Рассмотрим на плоскости вторую косоугольную систему координат $A_1$, $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$. Сопоставим каждой точке $P$, имеющей в первой системе координаты $(\alpha, \beta)$, точку $P_1$, имеющую во второй системе ту же пару координат $(\alpha, \beta)$ (рис. 96, *б*). Это значит, что от точки $A_1$ мы откладываем вектор

$$\overrightarrow{A_1P_1}=\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{v}_1 \quad (5)$$

и его конец — точку $P_1$ — сопоставляем точке $P$.

Итак, задано преобразование $f$ всей плоскости. Для этого преобразования $A_1=f(A)$, $B_1=f(B)$, $C_1=f(C)$. Докажем, что $f$ — движение.

Возьмем любые две точки $P$ и $Q$ и соответствующие им точки $P_1=f(P)$ и $Q_1=f(Q)$. Пусть

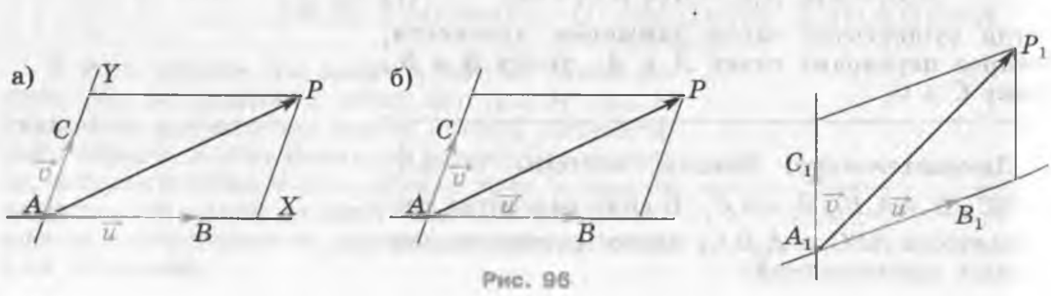



Рис. 96

$\overrightarrow{AP} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, $\overrightarrow{AQ} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v}$. Тогда
$\overrightarrow{A_1P_1} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1$, $\overrightarrow{A_1Q_1} = \gamma\vec{u}_1 + \delta\vec{v}_1$ и
$\overrightarrow{PQ} = (\gamma-\alpha)\vec{u} + (\delta-\beta)\vec{v}$, $\overrightarrow{P_1Q_1} = (\gamma-\alpha)\vec{u}_1 + (\delta-\beta)\vec{v}_1$. (6)

Возведя эти равенства в скалярный квадрат, получим:

$$\overrightarrow{PQ}^2 = (\gamma-\alpha)^2\vec{u}^2 + (\delta-\beta)^2\vec{v}^2 + 2(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\,\vec{u}\cdot\vec{v} \quad (7)$$

и

$$\overrightarrow{P_1Q_1}^2 = (\gamma-\alpha)^2\vec{u}_1^2 + (\delta-\beta)^2\vec{v}_1^2 + 2(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\,\vec{u}_1\cdot\vec{v}_1. \quad (8)$$

Ввиду равенств (3) соответствующие слагаемые в правых частях равенств (7) и (8) равны, т. е. $\overrightarrow{PQ}^2 = \overrightarrow{P_1Q_1}^2$. Но $\overrightarrow{PQ}^2 = PQ^2$ и $\overrightarrow{P_1Q_1}^2 = P_1Q_1^2$. Поэтому $P_1Q_1 = PQ$, т. е. $f$ — движение. ■

## 28.2. Замечание о распространении движения

Теоремы 33 и 34 позволяют движение $f$ любой плоской фигуры $M$ распространить на всю плоскость. Подробнее: найдется такое движение $g$ плоскости, которое совпадает с $f$ на всех точках фигуры $M$, т. е. $g(X) = f(X)$ для любой точки $X$ фигуры $M$.

Действительно, возьмем любые три точки $A$, $B$, $C$ фигуры $M$, не лежащие на одной прямой. (Если их нет, т. е. $M$ лежит на одной прямой, то возьмем две различные точки $A$ и $B$ фигуры $M$ и любую точку $C$, не лежащую на прямой $AB$.) Пусть $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$ и $C_1 = f(C)$. (Если $M$ лежит на прямой, то точку $C_1$ выберем так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равен треугольнику $ABC$.) Применив теорему 34, рассмотрим движение плоскости $g$, которое переводит треугольник $ABC$ в треугольник $A_1B_1C_1$. По теореме 33 движения $f$ и $g$ совпадают на фигуре $M$. ■

## 28.3. Теорема Шаля

Сначала отметим простое, но важное свойство движений: **композиция двух движений является движением.**

Действительно, пусть движением $f$ фигура $M$ переводится в фигуру $M_1$, а затем фигура $M_1$ переводится в фигуру $M_2$ движением $g$. В результате преобразование $g \circ f$ переведет фигуру $M$ в фигуру $M_2$. И при движении $f$, и при движении $g$ расстояния не изменялись. Значит, они и в итоге для преобразования $g \circ f$ не изменились, т. е. $g \circ f$ — движение. ■

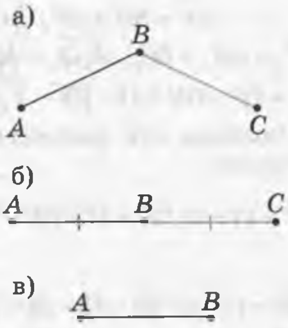


Рис. 97

**Теорема 35** *(о классификации движений).*

---

**Каждое движение на плоскости является либо переносом, либо поворотом, либо скользящим отражением, т. е. композицией осевой симметрии и переноса в направлении оси симметрии.**

---

**Замечание.** В формулировку теоремы мы не включаем осевую симметрию, так как осевая симметрия является частным случаем скользящего отражения, когда вектор переноса нулевой. Аналогично частными случаями поворота являются тождественное движение и центральная симметрия — повороты на угол в 0° и на угол 180°.

**Доказательство.** Теорему можно доказывать для случая, когда перемещаемая фигура — вся плоскость. Если же это не так, то согласно замечанию в п. 28.2 рассматриваемое движение распространяем на всю плоскость.

Пусть $f$ — заданное движение плоскости. Возьмем такую точку $A$, что точка $B = f(A)$ не совпадает с $A$. (Если $f(A) = A$ для всех точек, то $f$ — тождественное движение, т. е. поворот на 0°.) Итак, пусть $B \neq A$. Затем возьмем точку $C = f(B)$. Так как $f$ переводит точки $A$ и $B$ в точки $B$ и $C$, то $AB = BC$.

Для точек $A$, $B$, $C$ возможны три случая их расположения:

1) $A$, $B$, $C$ — вершины равнобедренного треугольника с основанием $AC$ — общий случай (рис. 97, *а*).

2) Точка $B$ — середина отрезка $AC$ (рис. 97, *б*).

3) Точка $C$ совпадает с точкой $A$ (рис. 97, *в*).

Возьмем еще какую-нибудь точку $D$, не лежащую на прямой $AB$, и пусть точка $D_1 = f(D)$. Тогда треугольник $ABD$ равен треугольнику $BCD_1$. Когда точки $A$, $B$, $C$ не лежат на одной прямой, точку $D$ берем вне угла $ABC$ достаточно близко к середине отрезка $AB$ так, чтобы тре-

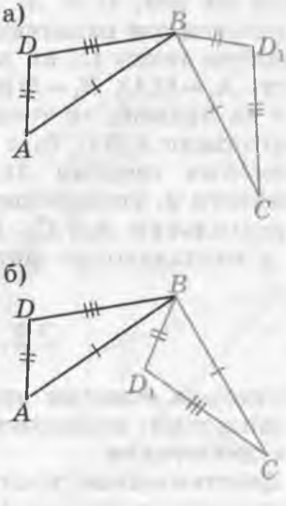


Рис. 98

угольники $ABD$ и $BCD_1$ не имели других общих точек, кроме вершины $B$, для обоих случаев расположения треугольника $BCD_1$, указанных на рисунке 98, *а* и *б*.

а) Рассмотрим случай, соответствующий рисунку 98, *а* — треугольник $BD_1C$ вне угла $ABC$. Пусть точки $K$ и $L$ — середины отрезков $AB$ и $BC$. Проведем серединные перпендикуляры $p$ и $q$ отрезков $AB$ и $BC$. Они пересекутся в точке $O$ (рис. 99, *а*).

Поворот $f_1$ вокруг точки $O$ на угол $\varphi = \angle KOL$ переводит треугольник $ABD$ в треугольник $BCD_1$. По теореме единственности движения (теорема **33**) получаем, что движения $f$ и $f_1$ совпадают, т. е. в рассматриваемом случае $f$ является поворотом.

б) Рассмотрим случай, соответствующий рисунку 99, *б* — треугольник $BCD_1$ внутри угла $ABC$. В этом случае треугольник $ABD$ можно сначала перевести в треугольник $A'B'D'$ переносом на вектор $\overrightarrow{KL}$ (рис. 99, *б*), а затем отражением в прямой $KL$ треугольник $A'B'D'$ перевести в треугольник $BCD_1$. Следовательно, треугольник $ABD$ переводится в треугольник $BCD_1$ скользящим отражением — композицией переноса на вектор $\overrightarrow{KL}$ и отражения в прямой $KL$. Снова, ссылаясь на теорему единственности, получаем, что $f$ в этом случае является скользящим отражением.

Пусть точка $B$ — середина отрезка $AC$. Тогда снова есть две возможности для расположения треугольника $BCD_1$ — они указаны на рисунке 100, *а* и *б*. В первом случае, когда треугольники $ABD$ и $BCD_1$ лежат по одну сторону от прямой $AB$, треугольник $ABD$ переводится в треугольник $BCD_1$ переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$. В этом случае движение $f$ — перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. Если же треугольники $ABD$ и $BCD_1$ лежат по разные стороны от прямой $AB$, то треугольник $ABD$ переводится в треугольник $BCD_1$ переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$ в композиции с отражением в прямой $AB$. В этом случае $f$ — скользящее отражение.

Наконец, если точки $C$ и $A$ совпадают, то снова возможны два случая расположения треугольников $ABD$ и $BCD_1$: по одну сторону от

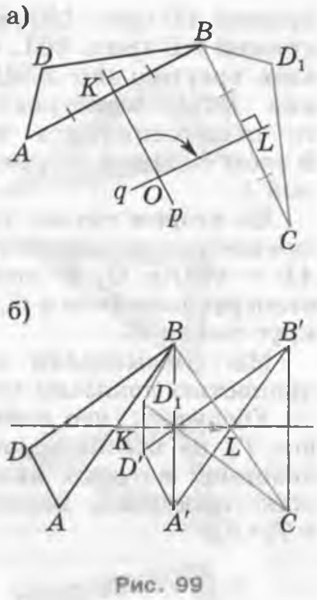



Рис. 99

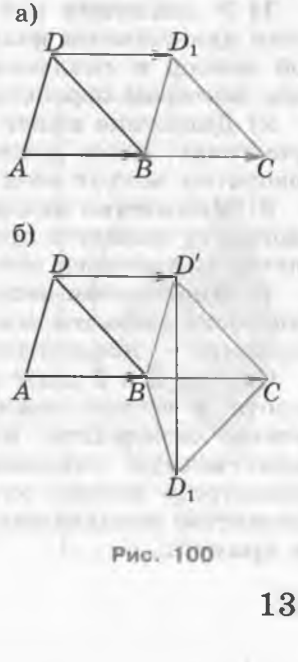



Рис. 100

прямой $AB$ (рис. 101, *а*) и по разные стороны от прямой $AB$ (рис. 101, *б*). В первом из этих случаев треугольник $ABD$ переводится в треугольник $BCD_1$ симметрией относительно серединного перпендикуляра отрезка $AB$ — прямой $l$. В этом случае $f$ — симметрия относительно прямой $l$.

Во втором случае треугольники $ABD$ и $BCD_1$ симметричны относительно середины отрезка $AB$ — точки $O$. В этом случае $f$ — симметрия относительно точки $O$, т. е. поворот на 180° вокруг точки $O$.

Мы рассмотрели все возможные случаи и полностью доказали теорему Шаля.■

Убедитесь, что осевая симметрия $S_A$ и перенос $T_{\vec{v}}$ на вектор $\vec{v}$, параллельный оси $a$, композицией которых является некоторая скользящая симметрия, перестановочны, т. е. $S_A \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ S_A$.

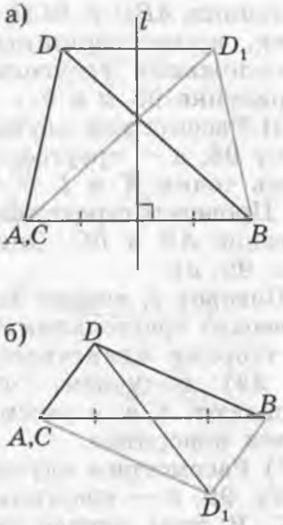


Рис. 101

## 28.4. Неподвижные точки движений

Важной характеристикой движений плоскости является множество его неподвижных точек. Оно устроено просто, и могут представиться лишь следующие четыре случая:

1) **У движения нет неподвижных точек.** Такими движениями являются перенос на ненулевой вектор и скользящее отражение с ненулевым вектором переноса.

2) **Движение имеет единственную неподвижную точку.** Такое движение плоскости является поворотом вокруг этой точки.

3) **Множество неподвижных точек движения плоскости является прямой.** Такое движение является симметрией относительно этой прямой.

4) **Множеством неподвижных точек движения плоскости является вся плоскость.** В этом случае движение — тождественное преобразование.

Случаи 2 и 3 дают характерные свойства поворота и осевой симметрии. Поэтому поворот можно определить как движение, имеющее единственную неподвижную точку. А осевую симметрию можно определить как движение, множество неподвижных точек которого является прямой.

## 28.5. Два рода движений. Ориентация

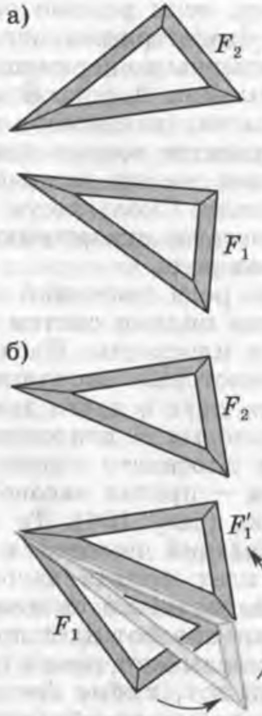



Рис. 102

Вам, наверное, не раз приходилось совмещать два одинаковых плоских предмета (например, два угольника или два чертежных шаблона; рис. 102, *а*). И вы, конечно, заметили, что иногда их можно совместить, просто перемещая по плоскости, а иногда для совмещения один из предметов еще необходимо перевернуть (рис. 102, *б*). Эти два случая соответствуют тому, что все движения на плоскости разбиваются на два класса. Те движения, которые могут быть реализованы непрерывными перемещениями, называются **движениями первого рода**. К ним относятся перенос и поворот. Действительно, перенос фигуры $F$ на вектор $\vec{v}$ является результатом переносов фигуры $F$ на векторы $t\vec{v}$, где параметр $t$ возрастает от 0 до 1 (рис. 103, *а*).

Аналогично поворот фигуры $F$ вокруг точки $O$ на угол $\varphi$ является результатом поворотов вокруг точки $O$ на угол $t\varphi$, где снова параметр $t$ возрастает от 0 до 1 (рис. 103, *б*).

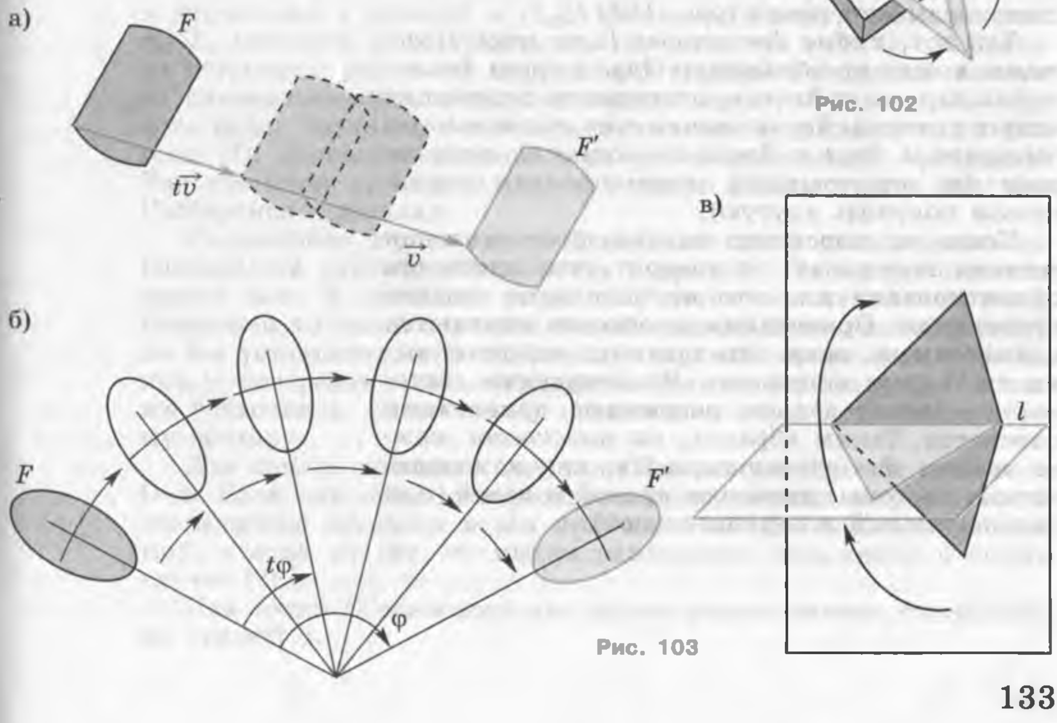



Рис. 103

Получить же скользящую симметрию как результат перемещений на плоскости нельзя. Например, если равные разносторонние треугольники симметричны относительно прямой $l$, то непрерывным перемещением перевести один треугольник в другой можно, лишь выйдя из плоскости (например, с помощью поворота в пространстве вокруг прямой $l$; рис. 103, *в*). Перемещая же их лишь в плоскости, совместить их нельзя. Скользящую симметрию (и в частности, осевую симметрию) называют **движением второго рода**.

Два рода движений плоскости тесно связаны с двумя видами систем прямоугольных координат на плоскости. Наглядно это связано с тем, что некоторые координатные системы преобразуются друг в друга движениями первого рода, а некоторые — движениями второго рода.

На плоскости имеются два направления поворота — против часовой стрелки и по часовой стрелке (рис. 104). Те системы координат, где кратчайший поворот полуоси $x \geqslant 0$ в полуось $y \geqslant 0$ идет против часовой стрелки, называют обычно правыми системами (рис. 104, *а*). Если же этот поворот идет по часовой стрелке, то систему называют левой (рис. 104, *б*).

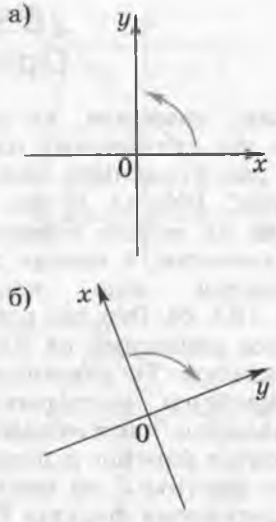



Рис. 104

Так вот, *любые две правые (или левые) системы можно преобразовать друг в друга движениями первого рода* (т. е. непрерывно перемещая одну в другую). *Разноименные же системы преобразуются друг в друга движениями второго рода* (и непрерывным перемещением одной нельзя получить другую).

Когда на плоскости задана прямоугольная система координат, то говорят, что **плоскость ориентирована** или что на плоскости введена **ориентация. Ориентации плоскости считаются одинаковыми,** если они задаются одноименными системами координат. Разноименные системы координат задают **различные ориентации плоскости.** Таким образом, *на плоскости можно задать две ориентации.* Их, как и координатные системы, называют **правой** и **левой** (или положительной и отрицательной).

## Вопросы

1. Какие виды движений вы знаете?
2. Какие общие свойства движений вы узнали в этом параграфе?
3. Возьмите два любых движения. Укажите разницу в их свойствах. А есть ли в их свойствах что-либо общее?
4. Каким может быть движение, если о нем известно, что: а) оно имеет неподвижную точку; б) оно не имеет неподвижных точек; в) оно сохраняет ориентацию плоскости; г) оно не сохраняет ориентации плоскости?
5. Предложите какую-нибудь классификацию движений.
6. Какие бывают системы координат на плоскости с точки зрения их ориентации?

## Задачи к § 28

### Разбираемся в решении

**28.1** **3** Каким движением является композиция поворота и отражения? Перестановочна ли эта композиция?

**Решение.** Пусть нам дан поворот с центром $O$ и некоторым углом (его величина не существенна), который мы обозначим $R_O$, и отражение в прямой $a$ ($S_a$). Рассмотрим такую композицию: $R_O \circ S_a$ (которую можно записать еще проще в виде $O \circ a$). Сначала установим род этого движения. Отражение в прямой является движением второго рода, а поворот является движением первого рода. Значит, их композиция является движением второго рода (?). Движение второго рода — это скользящее отражение. Так что ответ на вопрос задачи в самом общем случае получен. Разберемся в деталях.

Скользящее отражение вообще имеет две составляющие: параллельный перенос и отражение в прямой. Но вектор переноса может быть и нулевым, тогда получается отражение в прямой. Возможен ли такой случай в нашей задаче? Далее, интересно было бы установить, в какой именно прямой происходит отражение,— построить ее, зная исходную прямую $a$ и центр $O$,— а также установить, каков вектор переноса, если он не равен нулевому вектору.

Для начала займемся поисками неподвижной точки движения $O \circ a$. Если она есть, то в скользящем отражении отсутствует составляющая переноса и мы получаем чистое отражение в прямой, а если ее нет, то имеем скользящее отражение в общем случае (?).

Для точки $O$ возможны два случая расположения относительно прямой $a$.

1) $O \in a$. В этом случае получается именно отражение в прямой. В самом деле, точка $O$ остается неподвижной и в результате $S_a$, и в результате $R_O$, а потому в результате их композиции. Если скользящее отражение имеет неподвижную точку, то, как было сказано, оно является отражением в прямой.

2) $O \notin a$. Методом полного перебора можно установить, что неподвижная точка композиции не может находиться как на прямой, так и вне ее (?). А тогда ее вообще нет, и мы имеем в этом случае скользящее отражение в общем виде. Но где лежит его ось и каков вектор составляющего его переноса? Для ответа на этот вопрос возьмите конкретный угол поворота, скажем 90°, и постройте образы нескольких точек в данном движении $O \circ a$.

Для ответа на вопрос о перестановочности (коммутативности) полезно провести эксперименты с конкретными точками. Возьмем самый простой случай: $O \in a$, а угол поворота пусть будет прямой. На прямой $a$ выберем любую точку $A$, отличную от $O$. Теперь постройте точки $A_1 = O \circ a\ (A)$ и $A_2 = a \circ O\ (A)$. Эти точки не совпадают, значит, вообще говоря, эта композиция не перестановочна.

Но, может быть, она перестановочна в каких-то частных случаях, например при угле поворота 180° (?).

### Рисуем

**28.2** **1** Нарисуйте отрезок $AB$. Нарисуйте его образ в результате скользящего отражения, если: а) его ось параллельна $AB$; б) его ось перпендикулярна $AB$, но не пересекает $AB$; в) его ось пересекает $AB$.

**28.3** **1** Нарисуйте образ равностороннего треугольника в результате скользящего отражения: а) с осью, параллельной стороне, и вектором переноса, равным половине этой стороны; б) с осью, перпендикулярной стороне (рассмотрите разные случаи).

### Доказываем

**28.4** **3.4** Докажите такие свойства скользящего отражения: а) у него нет неподвижных точек; б) у него есть неподвижная прямая; в) композиция отражения и переноса не зависит от того, в какой последовательности они выполняются, т. е. они перестановочны; г) преобразование, обратное ему, также является скользящим отражением; д) ось скользящего отражения делит пополам все отрезки, соединяющие соответственные точки, не лежащие на оси; е) прямая, параллельная оси или перпендикулярная ей, переходит в прямую, ей параллельную.
(Предполагается, что вектор переноса ненулевой.)

**28.5** **3** Докажите, что каждое движение является композицией не более чем трех отражений.

### Исследуем

**28.6** 5 Изменяется ли ориентация плоскости в результате: а) переноса; б) осевой симметрии; в) поворота; г) центральной симметрии?

**28.7** 3 Каким движением является композиция: а) переноса и отражения; б) переноса и поворота; в) двух поворотов с разными центрами? Перестановочны ли эти композиции?

**28.8** 3 Пусть $a$, $b$, $c$ — три прямые на плоскости. В зависимости от их взаимного расположения установите, каким движением является композиция симметрий $S_c \circ S_b \circ S_a$ — осевых симметрий относительно этих прямых.

**28.9** 3 Пусть $A$, $B$, $C$ — три точки на плоскости. В зависимости от их взаимного положения установите, каким движением является композиция поворотов $R_C \circ R_B \circ R_A$ — поворотов относительно этих точек. Может ли она быть тождественным преобразованием?

# § 29. Симметрия фигур

## 29.1. Симметрия ограниченных фигур

На рисунке 105 изображены симметричные фигуры. Каждая из них симметрична относительно некоторой прямой, которая является осью симметрии. А на рисунке 106 изображены тоже симметричные фигуры, но другого типа. Они симметричны относительно некоторой точки, которая является их центром симметрии.

Говорят, что **фигура обладает симметрией**, если существует движение (не тождественное), переводящее ее в себя.

Например, фигура обладает **поворотной симметрией**, если она переводится в себя некоторым поворотом (рис. 107).

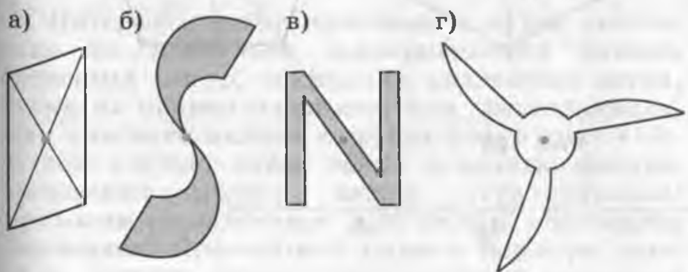


Рис. 106

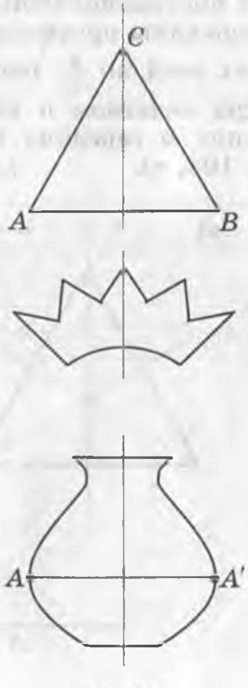


Рис. 105

Одна из самых симметричных фигур конечных размеров — это круг. Каждая прямая, проходящая через его центр, является его осью симметрии, а центр круга является центром поворотной симметрии, причем поворот может быть совершен на любой угол.

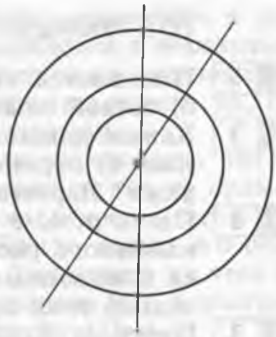


Рис. 107

Рассмотрим симметрию простейших фигур.

1) Отрезок имеет две оси симметрии и центр симметрии (укажите их).

2) Треугольник общего вида не имеет никакой симметрии. У равнобедренного (но не равностороннего) треугольника одна ось симметрии — серединный перпендикуляр, проведенный к его основанию.

3) У равностороннего треугольника три оси симметрии, и он имеет поворотную симметрию с углом поворота 120° (рис. 108, *а*).

4) У каждого правильного $n$-угольника есть $n$ осей симметрии, все они проходят через его центр. Он имеет также поворотную симметрию с углом поворота $\frac{360°}{n}$.

При четном $n$ одни оси симметрии проходят через противоположные вершины, другие — через середины противоположных сторон (и тех, и других осей по $\frac{n}{2}$; рис. 108, *б*).

При нечетном $n$ каждая ось проходит через вершину и середину противоположной стороны (рис. 108, *в*).

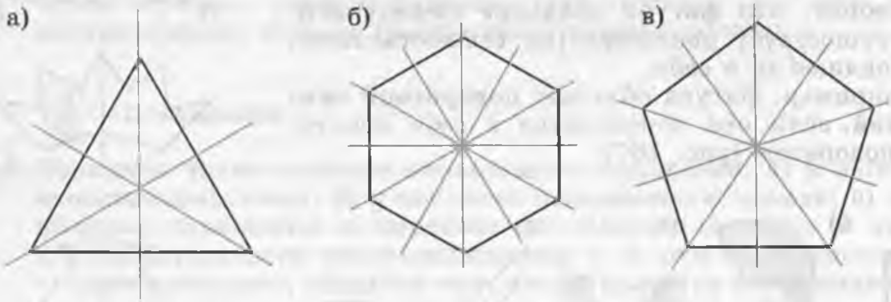



Рис. 108


Рис. 109

Центр правильного многоугольника с четным числом сторон является его центром симметрии. У правильного многоугольника с нечетным числом сторон центра симметрии нет.

## 29.2. Симметрия неограниченных фигур

В п. 29.1 мы рассматривали симметрию ограниченных фигур. При этом переносы не рассматривались. Оказывается, если фигура переходит в себя в результате какого-либо переноса (на ненулевой вектор), то она неограничена.

В самом деле, допустим, фигура $F$ совместилась сама с собой при переносе на вектор $\vec{a}$. Тогда любая ее точка $A$ перешла в такую точку $A_1$, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ (рис. 109). Но если фигура $F$ перешла в себя, то и точка $A_1$ ей принадлежит. Поэтому перенос на вектор $\vec{a}$ переводит точку $A_1$ в точку $A_2$, такую, что $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$. А тогда

$$\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = 2\vec{a}.$$

Так как фигура совместилась сама с собой, то она должна содержать и точку $A_2$ и т. д.

Получается, что фигура содержит бесконечный ряд точек, сдвинутых одна за другой на вектор $\vec{a}$. Значит, фигура неограничена.

О фигуре, которая совмещается сама с собой при некотором переносе, говорят, что она обладает **переносной симметрией**. Например, прямая имеет такую симметрию, так как допускает перенос вдоль себя.

## 29.3. Бордюры

Интересны неограниченные фигуры, состоящие из правильно повторяющихся равных конечных фигур, такие, как квадратная сетка, сетка из прямоугольников, или треугольников, или шестиугольников и других фигур (рис. 110). В том случае, когда такие конечные фигуры заполняют полосу между параллельными прямыми, заполненная ими полоса называется **бордюром**. Простейший пример бордюра дают обои (точнее, кусок обоев, который мыслится

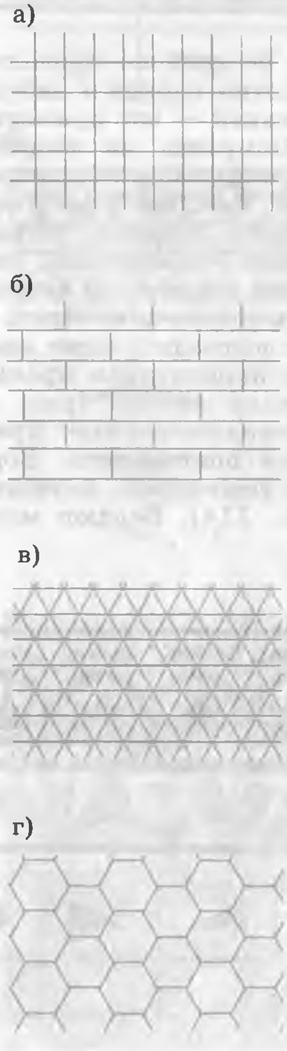



Рис. 110

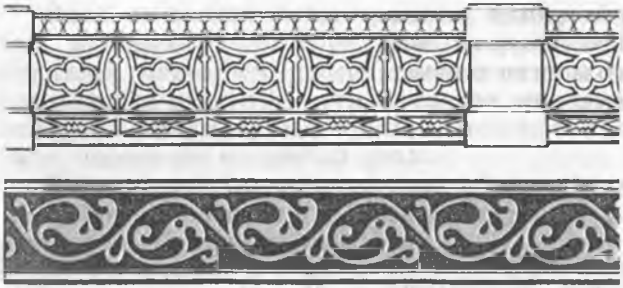


Рис. 111

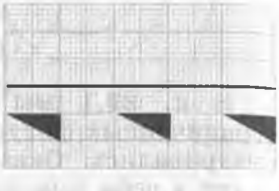


Рис. 112

как бесконечно продолженный в обе стороны). Решетки парков и набережных, узоры карнизов и тканей — вот примеры бордюров (рис. 111).

Опираясь на теорему Шаля, можно дать классификацию бордюров (по типу их симметрии). Каждый бордюр обладает переносной симметрией. Бордюр, который обладает только переносной симметрией, изображен на рисунке 112. Кроме переносной симметрии, у бордюра может быть осевая симметрия. Ось симметрии бордюра или перпендикулярна краям бордюра (рис. 113, *а*), или параллельна краям бордюра, являясь его средней линией (рис. 113, *б*). Ясно, что оси, перпендикулярные краям бордюра, периодически повторяются. Бордюр может иметь центры симметрии, лежащие на его средней линии (рис. 114). Бордюр может самосовмещаться и

а)

б)

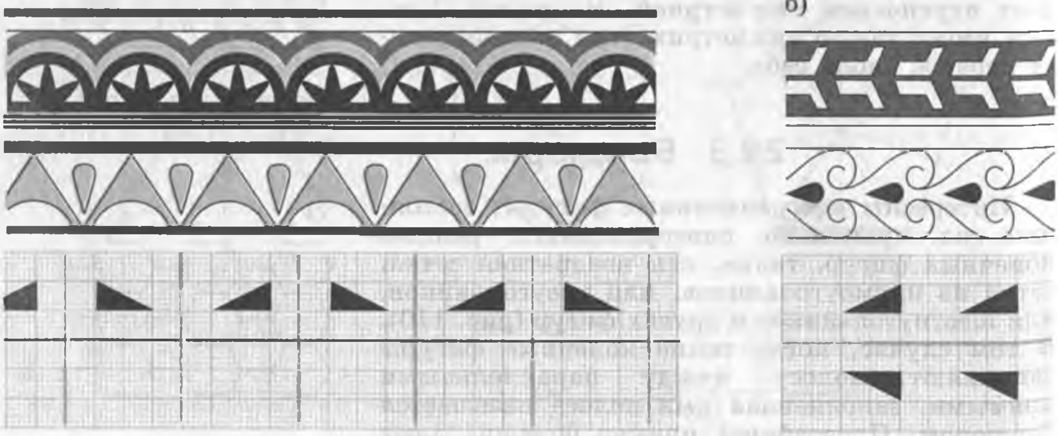


Рис. 113

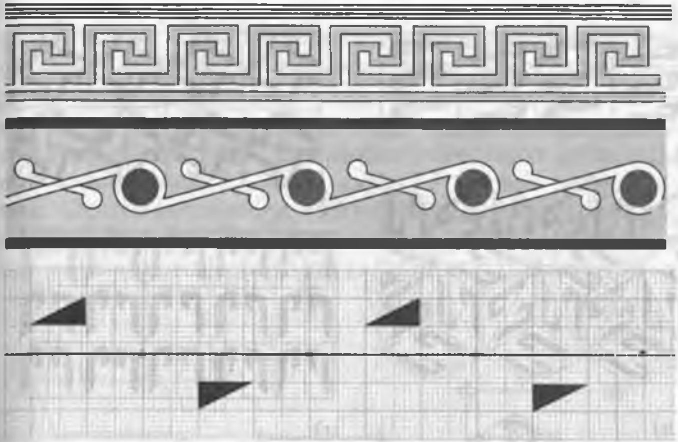


Рис. 114

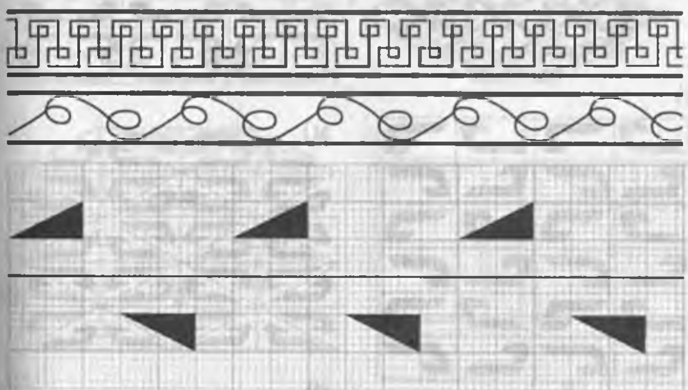


Рис. 115

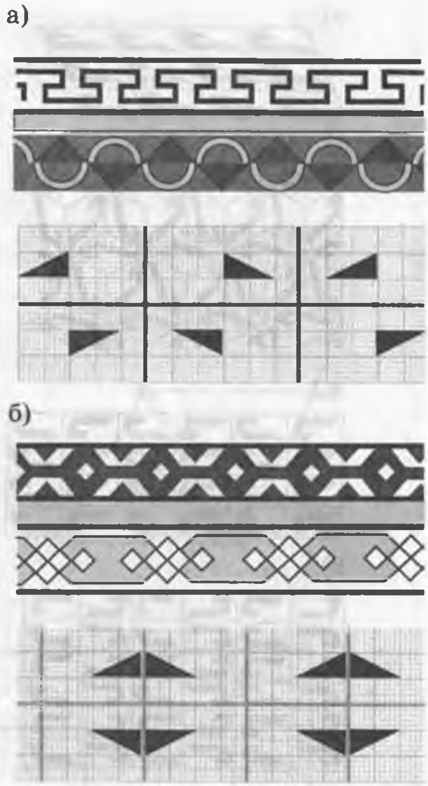



Рис. 116

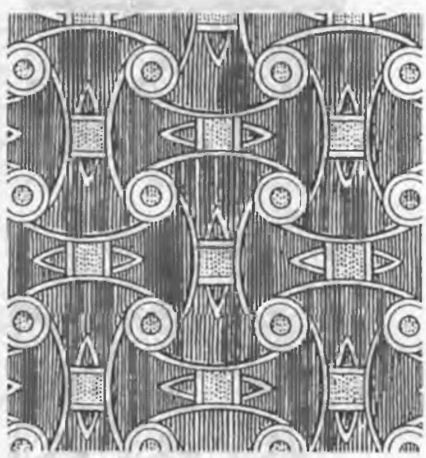


Рис. 117

скользящей симметрией (рис. 115). Всего встречается семь типов бордюров: к уже перечисленным пяти типам бордюров следует отнести еще два, сочетающие сразу все возможные виды симметрии (рис. 116).

## 29.4. Орнаменты

В том случае, когда правильно повторяющиеся равные друг другу конечные фигуры заполняют всю плоскость, говорят, что на плоскости задан **орнамент** (рис. 117). Орнаментами покрывали стены в древности (на рисунке 117 изображен древнеегипетский орнамент) и покрывают

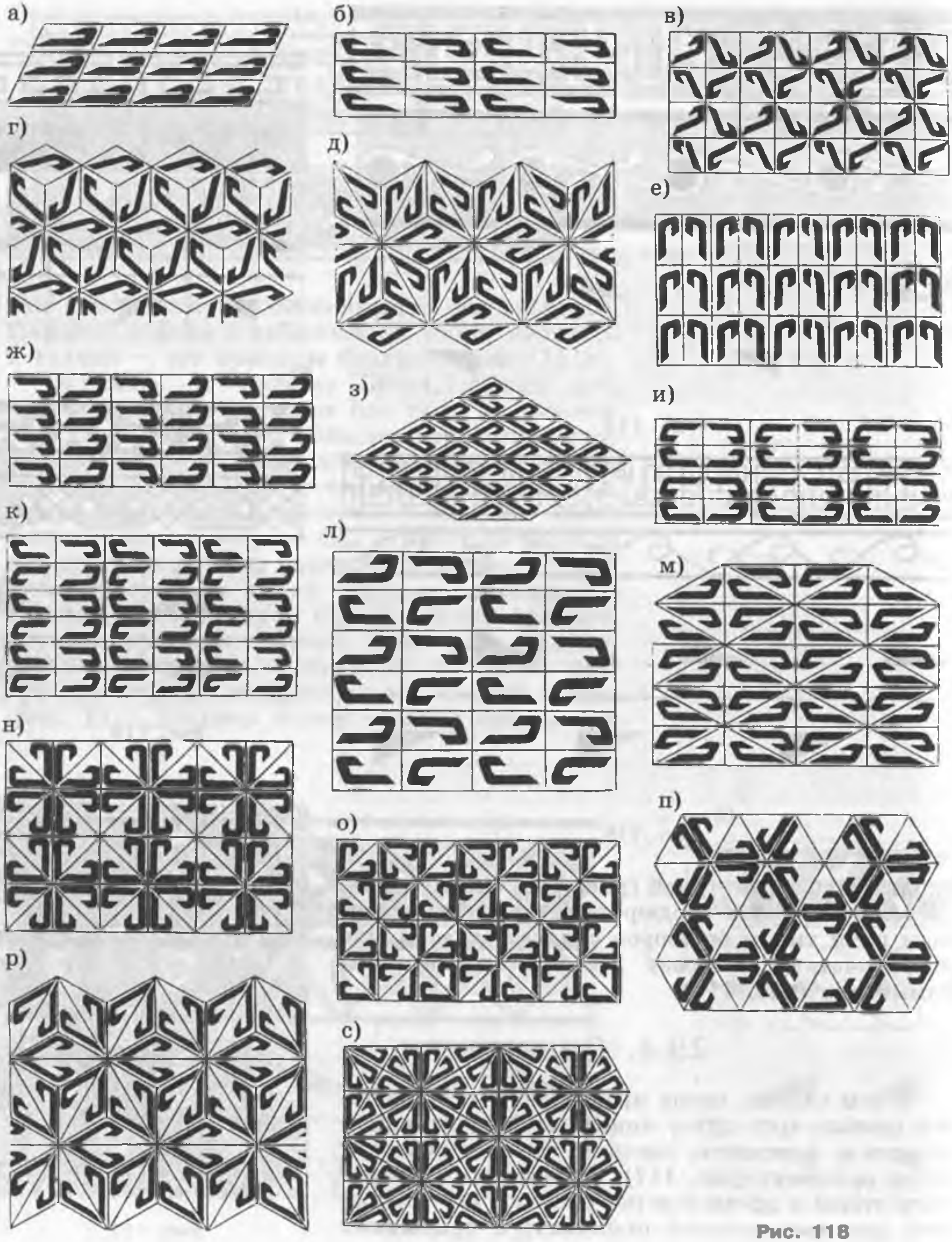



Рис. 118

теперь (например, оклеивая стены обоями). Для орнаментов к тем возможным видам симметрии, которые уже были перечислены для бордюров, добавятся еще поворотные симметрии на 120°, на 90° и на 60°. В 1891 году знаменитый кристаллограф Евграф Степанович Федоров доказал, что существует 17 (и только 17) типов орнаментов. Орнаменты всех типов проиллюстрированы на рисунке 118. А на рисунке 119 указаны виды симметрии соответствующего орнамента с

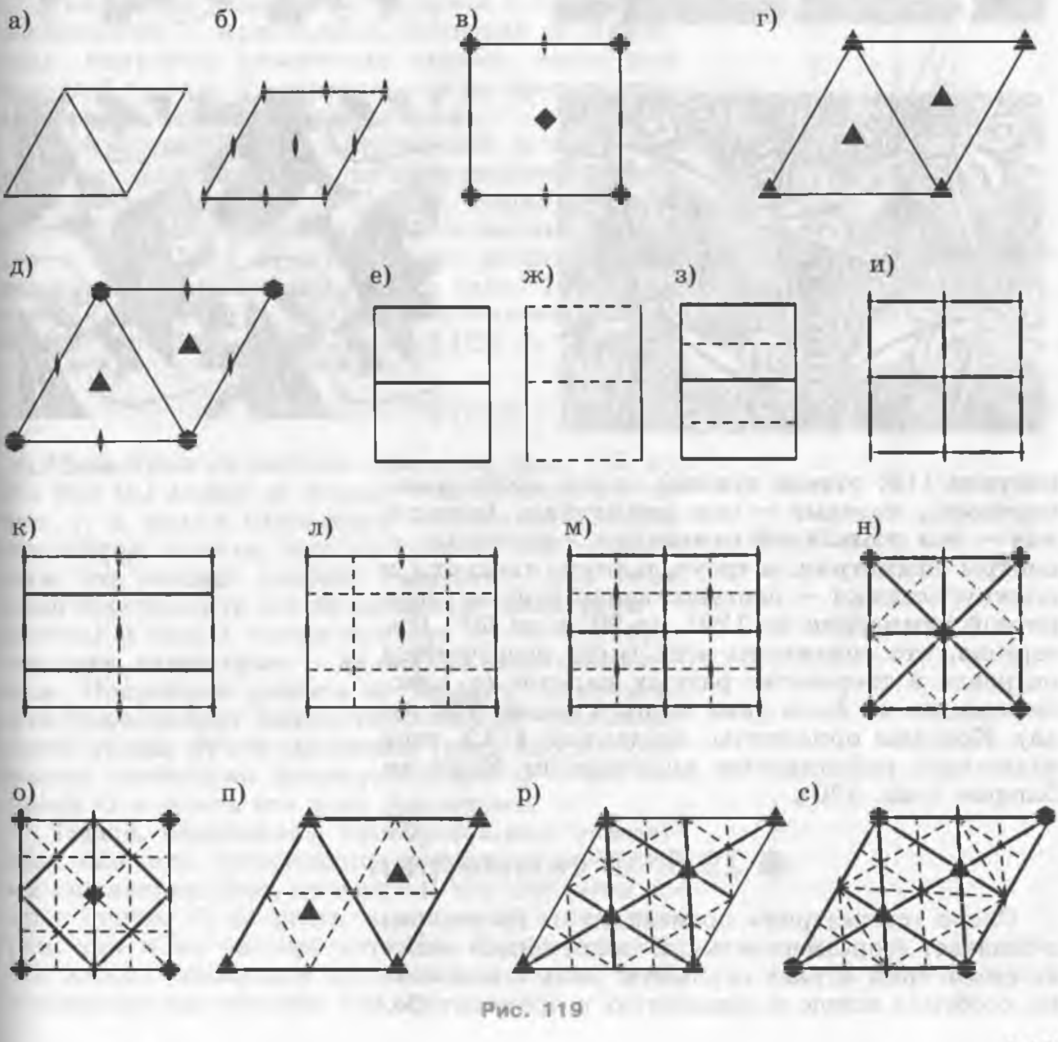



Рис. 119

Рис. 120

рисунка 118: тонкие прямые линии изображают переносы, толстые — оси симметрии, штриховые — оси скользящей симметрии, «чечевицы» — центры симметрии, а треугольники, квадраты и шестиугольники — соответственно центры поворотной симметрии на 120°, на 90° и на 60°. Интересно, что орнаменты всех типов встречаются издревле в творчестве разных народов (а классификация их была дана лишь в конце XIX века). Красивы орнаменты, созданные в XX веке известным голландским художником Морисом Эшером (рис. 120).

## 29.5. О симметрии

Слово «симметрия» происходит от греческого и означает «соразмерность». В таком общем смысле симметрия играет огромную роль в искусстве, особенно ясную в орнаментах и архитектуре.

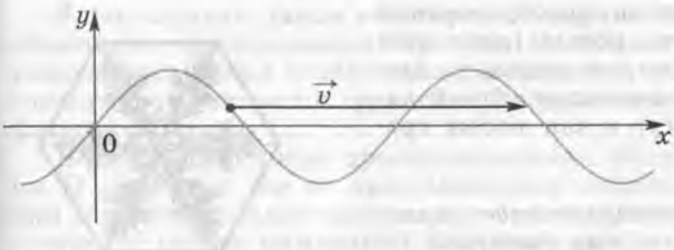



Рис. 121

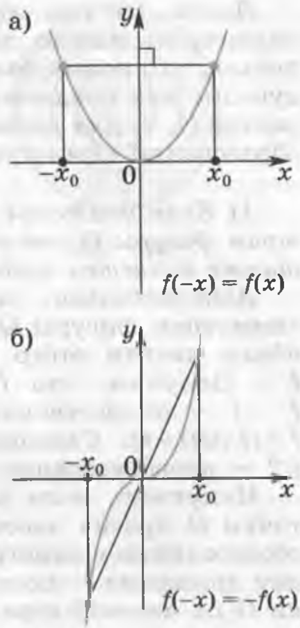



Рис. 122

Но ее можно заметить и в музыке, и в поэзии.

Симметрия широко встречается в природе, в особенности у кристаллов, растений и животных, например симметрия цветка, листа или морской звезды. Поразительные по красоте примеры симметрии дают снежинки.

Симметрия может встретиться и в других разделах математики, например при построении графиков функций. График периодической функции имеет переносную симметрию вдоль оси $x$ (рис. 121). График четной функции симметричен относительно оси $y$ (рис. 122, *а*), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 122, *б*).

## 29.6. Группа симметрии фигуры

Посмотрим на рисунок снежинки (рис. 123, *а*). На нем мы видим ее равные повторяющиеся части, т. е. видим симметрию снежинки. Давайте попробуем понять, как «устроена» эта симметрия, что создает красоту снежинки. Для этого надо перечислить все ее **элементы симметрии** — центры и оси, а также описать все ее **преобразования симметрии** — движения самосовмещения. Попробуем решить эту задачу, например, для правильного шестиугольника $Q$, соединяющего концы лучей снежинки (рис. 123, *б*). Элементы симметрии шестиугольника $Q$ — это его центр $O$ и шесть его осей симметрии.

Теперь перечислим преобразования симметрии. Все они, естественно, связаны с элементами симметрии. Это, во-первых, все повороты вокруг центра $O$ на углы, кратные 60°, как против, так и по часовой стрелке. Во-вторых, это все осевые симметрии относительно шести осей, указанных на рисунке 123, *б*.

Далее, из уже имеющихся преобразований симметрии можно получать новые (либо убедиться, что новых больше нет), опираясь на следующие два предложения, имеющие общий характер (т. е. для любых фигур и для любых преобразований симметрии):

а)

б)

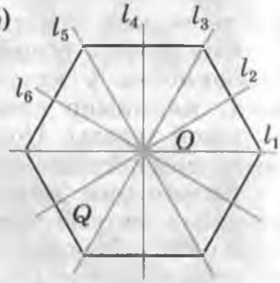



Рис. 123

1) *Если движение $f$ — преобразование симметрии фигуры $Q$, то обратное ему движение $f^{-1}$ также является преобразованием симметрии $Q$.*

Действительно, так как $f$ — преобразование симметрии фигуры $Q$, то $f(Q)=Q$. Применим к обеим частям этого равенства преобразование $f^{-1}$. Получим, что $f^{-1}(f(Q))=f^{-1}(Q)$. Так как $f^{-1}\circ f$ — тождественное преобразование, то $f^{-1}(f(Q))=Q$. Следовательно, $f^{-1}(Q)=Q$. Итак, $f^{-1}$ — преобразование симметрии фигуры $Q$. ■

Например, если поворот на угол $\varphi$ вокруг точки $O$ против часовой стрелки является преобразованием симметрии фигуры $Q$, то обратное ему движение — поворот на угол $\varphi$ вокруг точки $O$ по часовой стрелке также является преобразованием симметрии фигуры $Q$.

2) *Если движения $f$ и $g$ — преобразования симметрии фигуры $Q$, то их композиция $g\circ f$ также является преобразованием симметрии фигуры $Q$ или тождественным движением.*

Действительно, так как $f(Q)=Q$ и $g(Q)=Q$, то $g(f(Q))=g(Q)=Q$. ■

Например, композиция двух осевых симметрий относительно осей, проходящих через центр $O$ шестиугольника $Q$, является поворотом вокруг $O$, самосовмещающим шестиугольник $Q$ (на какой угол?).

Таким образом, кроме уже перечисленных, других преобразований симметрии у правильного шестиугольника $Q$ (а также и у снежинки) нет.

Пусть теперь $Q$ — произвольная фигура, а $S(Q)$ — совокупность всех ее преобразований симметрии, пополненная тождественным преобразованием. Мы установили, что $S(Q)$ обладает двумя свойствами: во-первых, для любого преобразования $f\in S(Q)$ обратное ему преобразование $f^{-1}\in S(Q)$ и, во-вторых, для любых двух преобразований $f,\ g\in S(Q)$ их композиция $g\circ f\in S(Q)$.

В тех случаях, когда некоторая совокупность обратимых преобразований фигуры $Q$ обладает указанными двумя свойствами, говорят, что эта совокупность является **группой преобразований фигуры $Q$**.

В частности, когда преобразованиями фигуры $Q$ являются все ее преобразования симметрии (вместе с тождественным преобразованием), говорят о **группе симметрии $S(Q)$ фигуры $Q$**.

Рис. 124

Чем богаче группа симметрии фигуры, тем симметричнее, правильнее эта фигура. Самая симметричная фигура — это вся плоскость. Любое движение плоскости совмещает ее с собой. Поэтому группой симметрии плоскости является группа всех движений плоскости.

Из многоугольников самыми симметричными являются правильные многоугольники. Группа симметрии правильного $n$-угольника конечна. Она состоит из $n$ поворотов вокруг центра $O$ этого многоугольника на углы $\varphi_k = k\,\frac{360^\circ}{n}$ (где $k = 0, 1, \ldots, n$) и $n$ осевых симметрий относительно его осей симметрии.

Из ограниченных фигур самые симметричные фигуры — окружность, круг или фигуры, являющиеся объединением окружностей с общим центром $O$ (рис. 124). Их группа симметрии состоит из всех поворотов вокруг точки $O$ и всех осевых симметрий, оси которых проходят через $O$.

Опишите группы симметрий равнобедренного треугольника, параллелограмма, прямоугольника, ромба, полосы между параллельными прямыми.

## 29.7. Группы преобразований фигур

В этом пункте под преобразованием $f$ фигуры $Q$ мы будем иметь в виду такое ее обратимое преобразование, которое преобразует $Q$ в $Q$, т. е. $f(Q) = Q$.

Необходимость рассматривать различные группы преобразований того или иного множества (а не только группы симметрии геометрических фигур) возникает очень часто. В математике они впервые появились в работах французского математика Эвариста Галуа (1811—1832), в его исследованиях о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. А вот более знакомый вам пример — кубик Рубика. Условия достижения результата в работе с кубиком Рубика тоже сводятся к изучению группы его преобразований.

Это разнообразие ситуаций, где возникает необходимость рассматривать группы преобразований, не случайно.

Одна из могущественных особенностей математики в том, что она устанавливает сходство и единство там, где его, казалось бы, не видно. Может быть, вы уже обратили внимание на сходство в операциях с преобразованиями и в операциях с числами.

В каждой **группе преобразований $G$ фигуры $Q$** определены две операции. Во-первых, для каждой пары преобразований $f_1$ и $f_2$ фигуры $Q$ определена их композиция — преобразование $f_2 \circ f_1$ фигуры $Q$. Она аналогична операции сложения чисел. (Аналогична, но не тождественна: свойство ассоциативности для нее выполняется, а коммутативности нет.) Во-вторых, для каждого преобразования $f$ из группы $G$ определено обратное ему преобразование $f^{-1}$ фигуры $Q$. Эта операция — аналог операции вычитания, сопоставляющей каждому числу $x$ число $-x$.

Группа преобразований называется **коммутативной**, если для двух любых преобразований $f_1$ и $f_2$ из этой группы выполняется равенство $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$.

У одной и той же фигуры $Q$ могут быть различные группы ее преобразований. Пусть $G$ и $H$ — две группы преобразований фигуры $Q$. Если каждое преобразование из группы $H$ является преобразованием из группы $G$ (т. е. $H$ — часть $G$), то говорят, что $H$ является **подгруппой группы** $G$, и пишут $H \subset G$.

Приведем несколько примеров групп преобразований самой широкой фигуры — всей плоскости. Для проверки того, что перечисленные ниже совокупности преобразований плоскости являются группами преобразований надо каждый раз убедиться, что выполняются оба условия из определения группы преобразований.

1. *Группа всех движений плоскости.* Она является подгруппой группы всех преобразований плоскости.

2. *Группа всех движений плоскости первого рода.* Это подгруппа группы всех движений плоскости.

**Замечание.** Движения плоскости второго рода не образуют группы, поскольку композиция двух движений второго рода является движением первого рода.

3. *Группа всех параллельных переносов плоскости.* Это подгруппа группы движений первого рода. Эта группа обладает коммутативностью. Действительно, композиция двух переносов $f$ и $g$ на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является параллельным переносом на вектор $\vec{a}+\vec{b}$. А поскольку $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, то $g \circ f = f \circ g$.

4. *Группа всех поворотов вокруг фиксированной точки O.* Проверьте, что это тоже коммутативная группа. Она является подгруппой группы движений первого рода.

## Вопросы

1. Что означает выражение «симметричная фигура»?
2. Приведите примеры симметричных фигур: а) ограниченных; б) неограниченных.
3. Приведите примеры группы симметрий некоторой фигуры.
4. Можно ли придать некоторый смысл таким выражениям: а) «правильная фигура»; б) «неправильная фигура»; в) «фигура $F_1$ симметричнее фигуры $F_2$»?

## Задачи к § 29

### Разбираемся в решении

**29.1** **4** Укажите группу симметрии полосы.

**Решение.** Пусть дана полоса $M$ с краями $p$ и $q$. Можно доказать, что она самосовмещается в результате таких движений: 1) тождественного преобразования ($E_M$); 2) параллельного переноса на любой вектор $\vec{a}$, параллельный $p$ ($T_{\vec{a}}$); 3) осевой симметрии относительно любой прямой $l$, перпендикулярной прямой $p$ ($S_l$); 4) осевой симметрии относительно прямой $b$, параллельной краям полосы и равноудаленной от краев — средней линии полосы — $S_b$; 5) центральной симметрии относительно любой точки $O$ на средней линии полосы, т. е. на $b$ ($Z_O$).

Обозначим это множество движений $G$. Для того чтобы убедиться в том, что $G$ является группой симметрии полосы, необходимо проверить, что мы нашли все движения, которые самосовмещают полосу. (Предположим, что «забыта», скажем, центральная симметрия. Тогда оставшееся множество из движений 1—4 не будет группой симметрии полосы. Почему?)

Чтобы убедиться в том, что мы «ничего не забыли», составим таблицу.

| | $E_M$ | $T_{\vec{a}}$ | $S_l$ | $S_b$ | $Z_O$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_M$ | | | | | |
| $T_{\vec{a}}$ | | | | | |
| $S_l$ | | | | | |
| $S_b$ | | | | | |
| $Z_O$ | | | | | |

В каждой ее клетке находится композиция движений, записанных в соответствующих строке и столбце. Условимся при этом считать, что первое движение в композиции находится в строке, а второе — в столбце. Так как каждое движение самосовмещает полосу, то и композиция будет ее самосовмещать, а значит, нам остается выяснить, имеется ли эта композиция среди указанных пяти движений. Если ее нет в множестве $G$, то, значит, мы «забыли» некоторое самосовмещение или не «увидели» его. Но в таком случае $G$ не есть группа симметрии полосы.

Начнем заполнять таблицу. Пусть нас интересует ее клетка, соответствующая $S_{l_2} \circ S_{l_1}$. Известно, что композиция таких симметрий является переносом на вектор, перпендикулярный прямой $l_1$, длина которого равна удвоенному расстоянию между осями симметрий $l_1$ и $l_2$. Но такой перенос имеется в множестве $G$. Будем так действовать, пока не заполним всю таблицу. Таким образом, требуется выполнить не очень интересную, но необходимую работу. Кстати, а что показала бы нам аналогичная таблица без центральной симметрии, если бы мы ее действительно не «увидели»? И наконец, где гарантия, что мы действительно «увидели» все самосовмещения полосы? Почему, например, мы уверены, что среди множества самосовмещений полосы нет какого-либо скользящего отражения?

Заполнение такой таблицы не дает само по себе полного ответа. В самом деле, если бы мы не «увидели» в множестве самосовмещений полосы центральной симметрии и отражения в средней линии, то оставшаяся таблица нам бы этого не подсказала (?).

## Рисуем

**29.2** **1** Нарисуйте фигуру, имеющую бесконечное множество осей симметрии, ограниченную, но не круг и не окружность.

**29.3** **1,2** Нарисуйте фигуру, самосовмещающуюся при повороте на 120°, но не имеющую центра симметрии и оси симметрии.

## Представляем

**29.4** **1** Может ли центрально-симметричный многоугольник иметь нечетное число сторон?

**29.5** **1,2** Центрально-симметричную фигуру разделили прямой на две части. Одна из них оказалась центрально-симметричной. Будет ли центрально-симметричной другая?

**29.6** **1,2** а) Каждая из двух фигур центрально-симметрична. Будет ли центрально-симметричным их пересечение? их объединение?

б) Пусть пересечение и объединение двух фигур центрально-симметричны. Значит ли, что каждая из них центрально-симметрична?

Решите аналогичную задачу для других движений.

## Доказываем

**29.7** **1,2** Дан угол. а) Докажите, что прямая, отсекающая на сторонах угла равные отрезки, перпендикулярна его биссектрисе. Докажите обратное. б) На его сторонах взяты две точки, равноудаленные от вершины. Из них проведены перпендикуляры на другие стороны угла. Докажите, что они равны и пересекаются на биссектрисе угла. в) На его сторонах взяты две точки, равноудаленные от вершины. Через них проведены перпендикуляры к тем сторонам, на которых они лежат, до пересечения с другой стороной угла. Докажите, что эти перпендикуляры равны и пересекаются на биссектрисе угла.

**29.8** **1,2** На биссектрисе угла взяли точку и провели окружность с центром в этой точке. Докажите, что: а) если она касается сторон угла, то хорда, соединяющая точки касания, перпендикулярна биссектрисе угла и делится ею пополам; б) если она пересекает стороны угла, то хорды, высекаемые сторонами угла в этом круге, равны.

**29.9** **1** Дан равнобедренный треугольник $ABC$, $AB=BC$. Из вершины $B$ проведена высота. На сторонах $BA$ и $BC$ взяты точки $K$ и $L$, равноудаленные от $B$. а) Докажите, что она делит пополам любую хорду треугольника, ей перпендикулярную. б) На этой высоте взята любая точка внутри, и через нее проведены хорды $AA_1$ и $CC_1$. Докажите, что $BA_1=BC_1$, а сами эти хорды равны. в) Докажите, что отрезки $CK$ и $AL$ равны и пересекаются на высоте треугольника. г) Докажите, что перпендикуляры, проведенные в точках $K$ и $L$ к сторонам треугольника, на которых они лежат, до пересечения с прямой $AC$, равны и пересекаются на высоте треугольника или на ее продолжении.

**29.10** **1** Дан равносторонний треугольник $ABC$. На сторонах $AB$, $BC$, $CA$ взяты соответственно точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ так, что $AC_1 = BA_1 = CB_1$. а) Вершинами какого по виду треугольника являются точки $A_1$, $B_1$, $C_1$? б) Пусть теперь проведены отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ и взяты точки $K$, $L$, $M$ — точки пересечения этих отрезков. Вершинами какого треугольника являются точки $K$, $L$, $M$?
Составьте аналогичную задачу для квадрата.

**29.11** **1** Докажите, что всякая хорда параллелограмма, проходящая через его центр симметрии: а) делится центром пополам; б) делит его на равновеликие части.

**29.12** **1** Докажите, что в равнобокой трапеции: а) углы при основании равны; б) диагонали равны; в) точка пересечения диагоналей равноудалена от боковых сторон.

**29.13** **1** Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$, $AD = DC$. На сторонах $BA$ и $BC$ отложены отрезки $BK = BL$, на сторонах $DA$ и $DC$ отложены отрезки $DN = DM$. Докажите, что $MK = LN$.

**29.14** **1** а) Докажите, что середины сторон правильного многоугольника являются вершинами правильного многоугольника. Обобщите.
б) Центр правильного многоугольника отразите от каждой его стороны. Докажите, что полученные точки являются вершинами правильного многоугольника.
Предложите другие способы получения правильного многоугольника, используя движения.

**29.15** **1.2** Фигура имеет центр симметрии. Докажите, что ее образ, полученный в результате любого движения, будет обладать тем же свойством. Обобщите задачу.

**29.16** **1** Докажите, что центрально-симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы. Верно ли обратное?

### Исследуем

**29.17** **3** Укажите группу симметрии фигуры $F$, если фигура $F$: а) отрезок; б) прямая; в) два параллельных и равных отрезка; г) две пересекающиеся прямые; д) две параллельные прямые; е) угол; ж) равнобедренный треугольник; з) ромб; и) прямоугольник; к) равнобокая трапеция.

**29.18** **3** Укажите группу симметрии фигуры $F$, если фигура $F$: а) окружность с выколотой точкой; б) окружность с двумя выколотыми точками; в) окружность с тремя выколотыми точками; г) два равносторонних треугольника с общей вершиной; д) два равносторонних треугольника с общей стороной; е) два равносторонних треугольника с общим центром.

**29.19** **3** Укажите группу симметрии фигуры $F$, если фигура $F$ — равносторонний треугольник, от которого отрезан меньший равносто-

ронний треугольник: а) с одного угла; б) с двух углов; в) с трех углов (отрезанные треугольники равны).
Составьте аналогичную задачу для квадрата.

**29.20** 3 Укажите группу симметрии объединения двух: а) окружностей; б) квадратов.

**29.21** 3 Укажите группу симметрии правильного многоугольника, в котором закрасили одним и тем же цветом: а) две соседние стороны; б) две произвольные стороны; в) три произвольные стороны.

**29.22** 3 Укажите группу симметрии шестиугольника, вписанного в окружность, у которого все углы равны.

**29.23** 3 Некоторая фигура переходит в себя в результате поворота на 20°. Переходит ли она в себя при повороте на: а) 10°; б) 40°; в) 90°?

**29.24** 3 Некоторая фигура переходит в себя в результате поворотов на 9° и на 10°. Переходит ли она в себя в результате поворота на 11°?

**29.25** 3 Выберите какой-либо элемент симметрии и нарисуйте фигуру, которая имеет только этот элемент симметрии (исключая тождественное самосовмещение). Затем решите аналогичную задачу, взяв два элемента симметрии.

**29.26** 1 В правильном пятиугольнике проведены все диагонали. Среди полученных точек пересечения найдите вершины правильного пятиугольника. Обобщите этот результат.

**29.27** 1 В окружность вписаны два равносторонних треугольника. Их границы пересекаются в шести точках. Выберите из них такие три, которые являются вершинами равностороннего треугольника.

**29.28** 1 Верно ли, что две взаимно перпендикулярные хорды квадрата, проходящие через его центр, равны? Верно ли обратное? Как обобщить полученный результат?

**29.29** 2 Верно ли, что любая хорда полосы, соединяющая ее края, делится пополам ее средней линией?

**29.30** 3 Равносторонний треугольник определим как треугольник с тремя осями симметрии, равнобедренный треугольник — как треугольник с одной осью симметрии, равнобокую трапецию — как трапецию с одной осью симметрии. Выведите отсюда свойства этих фигур.

**29.31** 3 Определим параллелограмм как четырехугольник с центром симметрии, ромб — как четырехугольник, у которого диагонали являются осями симметрии, прямоугольник — как четырехугольник, у которого средние линии являются осями симметрии. Выведите отсюда свойства этих фигур. Придумайте аналогичное определение квадрату, а затем выведите его свойства.

**29.32** 1 У выпуклого четырехугольника есть центр симметрии. Можно ли в него вписать окружность? Можно ли около него описать окружность?
Ответьте на те же вопросы, если у него есть ось симметрии.

**29.33** 1 Выпуклый четырехугольник переходит в себя в результате некоторого поворота, но не центральной симметрии. Является ли он квадратом? Можно ли обобщить эту задачу?

**29.34** 1 Некоторый многоугольник имеет центр симметрии. Пусть в него можно вписать окружность. Совпадают ли центр этой окружности и центр симметрии? Ответьте на тот же вопрос, если около него можно описать окружность.

**29.35** 1 Выделим четыре свойства выпуклого четырехугольника. 1) В него можно вписать окружность. 2) Около него можно описать окружность. 3) Он имеет центр симметрии. 4) Он имеет ось симметрии. Пусть он имеет два из этих свойств. Имеет ли он остальные?

**29.36** 2 Требуется заполнить плоскость многоугольниками. Как это сделать, если для этого можно использовать: а) правильные многоугольники только одного вида; б) правильные многоугольники разных видов; в) произвольный четырехугольник одного вида; г) произвольный многоугольник одного вида?

### Строим

**29.37** 1,2 Восстановите: а) угол по биссектрисе и точке на стороне; б) полосу по средней линии и точке на границе; в) равнобедренный треугольник по оси симметрии и двум точкам на его боковых сторонах; г) равносторонний треугольник по его центру и трем точкам на его сторонах.

**29.38** 2 Разделите пополам угол с недоступной вершиной.

**29.39** 2 Вершина угла недоступна. Проведите прямую через данную точку внутри угла, проходящую через его вершину.

**29.40** 1 Восстановите треугольник, если от него остались: а) две вершины и прямая, на которой лежит биссектриса третьего угла; б) вершина и три прямые, на которых лежали биссектрисы его углов; в) середины двух сторон и прямая, на которой лежит одна из биссектрис.

## § 30. Равновеликость и равносоставленность

В этом параграфе мы докажем, что *две равновеликие многоугольные фигуры на плоскости можно разбить на соответственно равные многоугольники* (так, как, например, разбиты треугольник и прямоугольник на рисунке 125). Эта теорема была доказана в XIX в. венгерским математиком Ф. Бойяи (в 1832 г.) и немецким офицером и любителем математики П. Гервином (в 1833 г.) и потому носит название теоремы Бойяи — Гервина. Ее доказательство не просто, и мы разобьем его на несколько этапов.

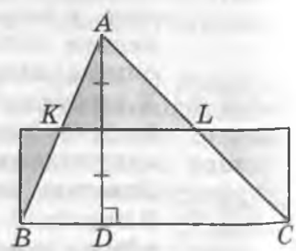


Рис. 125

## 30.1. Еще раз о понятии площади

В п. 2.1 в определении площади многоугольных фигур условие 2 состояло в том, что площади равных треугольников равны. Ясно, что верно и более общее утверждение:

*Площади равных многоугольных фигур равны.*

**Доказательство.** Пусть $P$ и $P'$ — равные многоугольные фигуры. Тогда существует такое движение $f$, что $P'=f(P)$. По определению многоугольной фигуры фигура $P$ составлена из некоторых треугольников $T_1, \ldots, T_k$. Тогда фигура $P'$ будет составлена из равных им треугольников $T'_1=f(T_1), \ldots, T'_k=f(T_k)$.

Так как

$$S(T'_1)=S(T_1), \ldots, S(T'_k)=S(T_k) \qquad (1)$$

и

$$S(P')=S(T'_1)+\ldots+S(T'_k),\ S(P)=S(T_1)+\ldots+S(T_k), \qquad (2)$$

то

$$S(P')=S(P). \blacksquare$$

Теперь в определении площади многоугольной фигуры условие 2 можно формулировать так: *площади равных многоугольных фигур равны.*

Этого не было сделано в п. 2.1 из-за того, что тогда у нас еще не было определено равенство произвольных фигур.

## 30.2. Отношения равенства, равновеликости и равносоставленности

В этом параграфе сравниваются три отношения между многоугольными фигурами, указанные в названии п. 30.2. Удобно ввести следующие обозначения. Если фигуры $P$ и $Q$ равны, то пишем $P \cong Q$.

Если фигуры $P$ и $Q$ равновелики, то пишем $P \underset{\text{р.-в.}}{\sim} Q$.

Если многоугольная фигура $P$ разбита на многоугольные фигуры $P_1, \ldots, P_k$ (или, что то же самое, $P$ составлена из фигур $P_1, \ldots, P_k$, см. п. 1.5), то будем писать $P=P_1+\ldots+P_k$ (рис. 126).

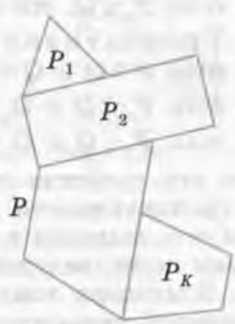


Рис. 126

Говорят, что две многоугольные фигуры $P$

и $Q$ **равносоставлены**, если их можно разбить на соответственно равные многоугольные фигуры.

Это значит, что найдется такое разбиение фигуры $P$ на многоугольные фигуры $P_1, \ldots, P_k$ и такое разбиение фигуры $Q$ на многоугольные фигуры $Q_1, \ldots, Q_k$, что $P_1 \cong Q_1, \ldots, P_k \cong Q_k$ (рис. 127). Если фигуры $P$ и $Q$ равносоставлены, то пишут $P \underset{\text{р.-с.}}{\sim} Q$.

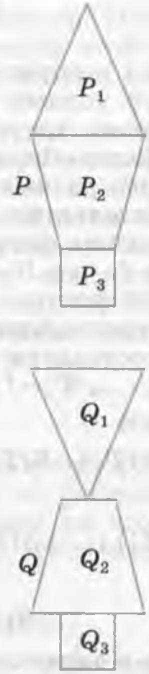


Рис. 127

Ясно, что равные фигуры равновелики, но из равновеликости фигур не следует их равенство (приведите примеры). Далее, легко показать, что *равносоставленные фигуры равновелики.*

Действительно, если $P = P_1 + \ldots + P_k$, $Q = Q_1 + \ldots + Q_k$ и $P_1 \cong Q_1, \ldots, P_k \cong Q_k$, то $S(P_1) = S(Q_1), \ldots, S(P_k) = S(Q_k)$ и потому $S(P) = S(P_1) + \ldots + S(P_k) = S(Q_1) + \ldots + S(Q_k) = S(Q)$. ■

Теорема Бойяи — Гервина утверждает, что верно и обратное предложение: *равновеликие многоугольные фигуры равносоставлены.*

Таким образом, для многоугольных фигур отношения равновеликости и равносоставленности равносильны. Интересно, что для многогранных фигур в пространстве это уже не так: куб не равносоставлен с равновеликим ему тетраэдром, все ребра которого равны.

Все рассматриваемые здесь отношения обладают тремя одинаковыми свойствами: рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью.

1. Рефлексивность:

*для любой многоугольной фигуры $P$*: а) $P \cong P$; б) $P \underset{\text{р.-в.}}{\sim} P$; в) $P \underset{\text{р.-с.}}{\sim} P$.

2. Симметричность:

а) *если $P \cong Q$, то $Q \cong P$;*

б) *если $P \underset{\text{р.-в.}}{\sim} Q$, то $Q \underset{\text{р.-в.}}{\sim} P$;*

в) *если $P \underset{\text{р.-с.}}{\sim} Q$, то $Q \underset{\text{р.-с.}}{\sim} P$.*

3. Транзитивность:

а) *если $P \cong Q$ и $Q \cong R$, то $P \cong R$;*

б) *если $P \underset{\text{р.-в.}}{\sim} Q$ и $Q \underset{\text{р.-в.}}{\sim} R$, то $P \underset{\text{р.-в.}}{\sim} R$;*

в) *если $P \underset{\text{р.-с.}}{\sim} Q$ и $Q \underset{\text{р.-с.}}{\sim} R$, то $P \underset{\text{р.-с.}}{\sim} R$.*

Все эти свойства очевидны, кроме последнего — транзитивности равносоставленности. Докажем его, выделив в отдельную лемму (первую из серии лемм, ведущих к теореме Бойяи — Гервина). Благодаря тому что отношение равносоставленности симметрично, лемму о его транзитивности можно сформулировать так:

**Лемма 1.**

**Две многоугольные фигуры $P$ и $Q$, равносоставленные с третьей фигурой $R$, равносоставлены.**

**Доказательство.** Так как $P \underset{\text{р.-с.}}{\sim} R$, то найдутся такие разбиения фигур $P$ и $R$ на многоугольные фигуры $P_1, \ldots, P_k$ и $R_1, \ldots, R_k$, что $P_1 \cong R_1, \ldots, P_k \cong R_k$.

Аналогично так как $Q \underset{\text{р.-с.}}{\sim} R$, то найдутся такие разбиения фигуры $Q$ и $R$ на многоугольные фигуры $Q_1, \ldots, Q_n$ и $R'_1, \ldots, R'_n$, что $Q_1 \cong R'_1, \ldots, Q_n \cong R'_n$ (рис. 128).

Каждое разбиение многоугольной фигуры осуществляется некоторой сетью отрезков. На фигуре $R$ «нарисованы» две сети: от разбиения $R_1, \ldots, R_k$ и от разбиения $R'_1, \ldots, R'_n$. Объединение этих двух сетей даст новую сеть из отрезков, которая разобьет фигуру $R$ на более мелкие многоугольные фигуры. Эти многоугольные фигуры $R_{ij}$ получаются в пересечении фигуры $R_i$ с фигурой $R'_j$. Каждая из фигур $R_1, \ldots, R_k$ разбита на эти фигуры (среди них могут быть и вырожденные в точки, отрезки и т. п.):

$$
\begin{aligned}
&R_1 = R_{11} + R_{12} + \ldots + R_{1n},\\
&R_2 = R_{21} + R_{22} + \ldots + R_{2n},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&R_k = R_{k1} + R_{k2} + \ldots + R_{kn}.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Так как $P_1 \cong R_1$, то фигуру $P_1$ можно разбить так же, как и $R_1: P_1 = P_{11} + \ldots + P_{1n}$. Аналогичные разбиения получаем и для остальных фигур $P_2, \ldots, P_k: P_2 = P_{21} + P_{22} + \ldots + P_{2n}, \ldots, P_k = P_{k1} + P_{k2} + \ldots + P_{kn}$. При этом для любых индексов $i$ и $j$ фигуры $P_{ij}$ и $R_{ij}$ равны: $P_{ij} \cong R_{ij}$.

Но и фигуры $Q_1, \ldots, Q_n$, равные фигурам $R'_1, \ldots, R'_n$, также можно разбить на фигуры $Q_{ij}$, равные фигурам $R_{ij}$:

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = Q_{11} + Q_{21} + \ldots + Q_{k1},\\
&Q_2 = Q_{12} + Q_{22} + \ldots + Q_{k2},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&Q_n = Q_{1n} + Q_{2n} + \ldots + Q_{kn}.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Так как $Q_{ij} \cong R_{ij}$ и $P_{ij} \cong R_{ij}$, то $Q_{ij} \cong P_{ij}$. Следовательно, $P \underset{\text{р.-с.}}{\sim} Q$. ■

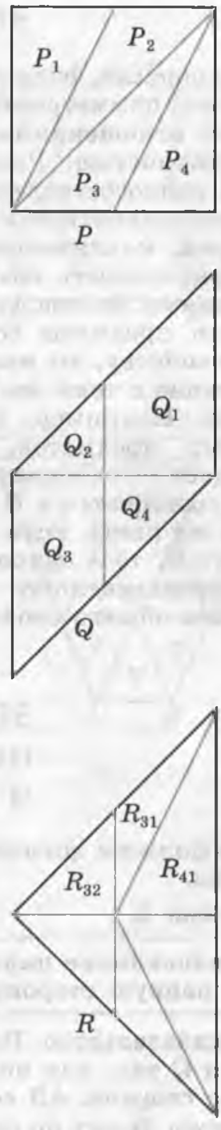



Рис. 128

## 30.3. Отношение эквивалентности

Отношения, обладающие свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называют **отношениями эквивалентности** или **эквивалентностью**. Равенство фигур, равновеликость, равносоставленность являются отношениями эквивалентности. Убедитесь, что равенство векторов, коллинеарность ненулевых векторов, сонаправленность векторов также являются отношениями эквивалентности.

Если предметы сопоставляются по какому-либо свойству, то между ними обнаруживается отношение с теми же свойствами — эквивалентностью. Например, сравнение по цвету одноцветных предметов. Каждый предмет имеет свой цвет — одноцветен сам с собой. Если предмет $A$ одноцветен с $B$, то $B$ одноцветен с $A$ (имеет тот же цвет). Если предмет $A$ одноцветен с $B$, а $B$ — с $C$, то $A$ одноцветен с $C$. Вообще отношение эквивалентности указывает на наличие некоторого общего свойства.

## 30.4. Равносоставленность параллелограммов и прямоугольников

Продолжим доказательство теоремы Бойяи — Гервина.

**Лемма 2.**

**Равновеликие параллелограммы $P$ и $Q$, имеющие равную сторону, равносоставлены.**

**Доказательство.** Расположим параллелограммы $P$ и $Q$ так, как показано на рисунке 129, их равные стороны $AB$ совпадают, а сами параллелограммы лежат по одну сторону от прямой $AB$. Так как параллелограммы $P$ и $Q$ равновелики, то их высоты, опущенные на сторону $AB$, равны. Поэтому их стороны $CD$ и $KL$, противоположные стороне $AB$, лежат на одной прямой, параллельной прямой $AB$.

Возможны два случая:

1) Боковые стороны параллелограммов $P$ и $Q$ не пересекаются (рис. 129, $a$). Пусть точка $K$ ле-

жит на стороне $CD$. Тогда параллелограмм $P$ составлен из трапеции $ABCK$ и треугольника $ADK$, а параллелограмм $Q$ составлен из той же трапеции $ABCK$ и треугольника $BCL$. Так как $\triangle ADK = \triangle BCL$, то $P_{\text{р.-с.}}^{\sim} Q$.

2) Боковые стороны параллелограммов $P$ и $Q$ пересекаются. Например, стороны $AK$ и $BC$ пересекаются в точке $O$ (рис. 129, *б*). В параллелограммах $P$ и $Q$ разместим одинаковое число треугольников $T$, равных треугольнику $AOB$, так, как показано на рисунке 129, *б*. Если эти треугольники не заполнят полностью параллелограммы $P$ и $Q$, то в $P$ и $Q$, кроме треугольников $T_1$, останутся еще два параллелограмма $A'B'CD$ и $A''B''LK$, соответствующие случаю а). Как показано, $A'B'CD_{\text{р.-с.}}^{\sim} A''B''LK$. Поэтому и $P_{\text{р.-с.}}^{\sim} Q$. ■

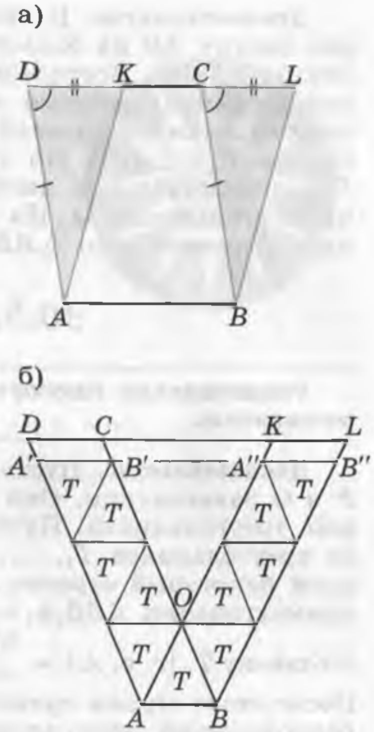


Рис. 129

**Лемма 3.**

---

**Два равновеликих прямоугольника равносоставлены.**

---

**Доказательство.** Пусть прямоугольник $P$ со сторонами $a$, $b$ и прямоугольник $Q$ со сторонами $c$, $d$ равновелики. Тогда $ab = cd$. Можно считать, что $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$, а также $a < c$. Так как $ab = cd$, то тогда $b > d$. Построим параллелограмм $R$ со сторонами $b$ и $c$ и высотой $a$, опущенной на сторону $b$ (рис. 130). Это возможно, так как $c > a$. Поскольку $S(P) = S(R)$ и параллелограммы $P$ и $R$ имеют по стороне, равной $b$, то $P_{\text{р.-с.}}^{\sim} R$ (по лемме 2).

Далее, $S(Q) = S(P) = S(R)$ и параллелограммы $Q$ и $R$ имеют по стороне, равной $c$. Поэтому $Q_{\text{р.-с.}}^{\sim} R$ (по лемме 2). А тогда $P_{\text{р.-с.}}^{\sim} Q$ (по лемме 1). ■

**Лемма 4.**

---

**Каждый треугольник равносоставлен с прямоугольником, одной из сторон которого можно выбрать любой заданный отрезок.**

---

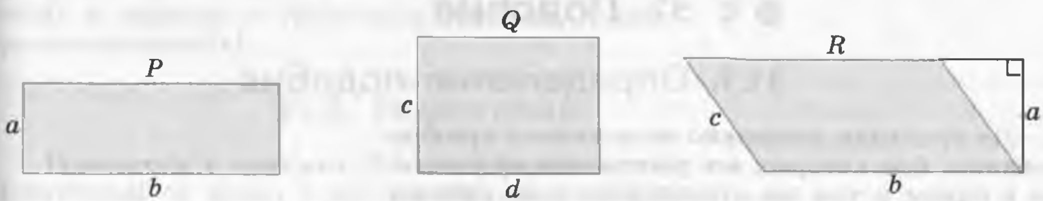


Рис. 130

**Доказательство.** В треугольнике $ABC$ проведем высоту $AD$ на большую сторону и среднюю линию $KL \| BC$. Построим прямоугольник $P$, одной стороной которого является $BC$, а другая сторона лежит на прямой $KL$ (рис. 125). Очевидно, что $P_{\text{р.-с.}}\!\!\sim \triangle ABC$. По лемме 3 прямоугольник $P$ равносоставлен с любым равновеликим ему прямоугольником $Q$. Из этого, а также из леммы 1 вытекает, что $\triangle ABC_{\text{р.-в.}}\!\!\sim Q$.■

## 30.5. Теорема Бойяи—Гервина

**Равновеликие многоугольные фигуры равносоставлены.**

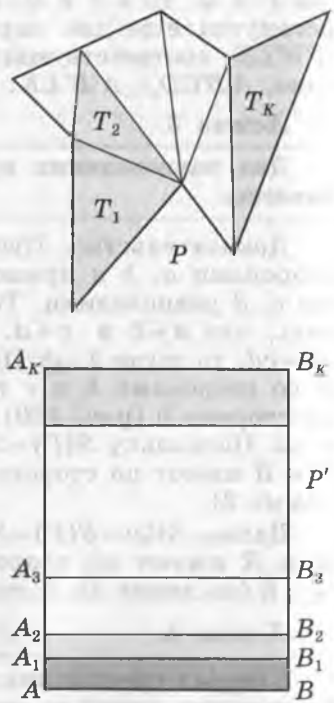


Рис. 131

**Доказательство.** Пусть многоугольные фигуры $P$ и $Q$ равновелики. Они составлены из некоторых треугольников. Пусть фигура $P$ составлена из треугольников $T_1, \ldots, T_k$ (рис. 131). Фиксируем некоторый отрезок $AB$ и построим на нем прямоугольник $ABB_1A_1 = P_1$, равновеликий треугольнику $T_1$ $\left(\text{т. е. } AA_1 = \frac{S(T_1)}{AB}\right)$. По лемме 4 $P_{1\,\text{р.-с.}}\!\!\sim T_1$. После этого строим прямоугольник $P_2 = A_1B_1B_2A_2$, равновеликий треугольнику $T_2$. По лемме 4 $P_{2\,\text{р.-с.}}\!\!\sim T_2$. Продолжая эти построения, построим прямоугольник $P' = AA_kB_kB = P_1 + P_2 + \ldots + P_k$.

Так как $S(T_1) = S(P_1)$, ..., $S(T_k) = S(P_k)$, то $S(P) = S(P')$. Поскольку $P = T_1 + \ldots + T_k$, $P' = P_1 + \ldots + P_k$, то $P_{\text{р.-с.}}\!\!\sim P'$ (так как $T_{\text{р.-с.}}\!\!\sim P_1$, ..., $T_{k\,\text{р.-с.}}\!\!\sim P_k$).

Проведем теперь аналогичное построение для фигуры $Q$, строя на $AB$ прямоугольник, равновеликий фигуре $Q$. Так как $S(Q) = S(P) = S(P')$, то в итоге построим тот же самый прямоугольник $P'$. Как и для фигуры $Q$, получим, что $Q_{\text{р.-с.}}\!\!\sim P'$. Но тогда по лемме 1 $P_{\text{р.-с.}}\!\!\sim Q$.■

# ● § 31. Подобие

## 31.1. Определение подобия

На практике постоянно встречаются преобразования, при которых все расстояния изменяются в одном и том же отношении, т. е. умножаются на одно и то же число. Такое преобразова-

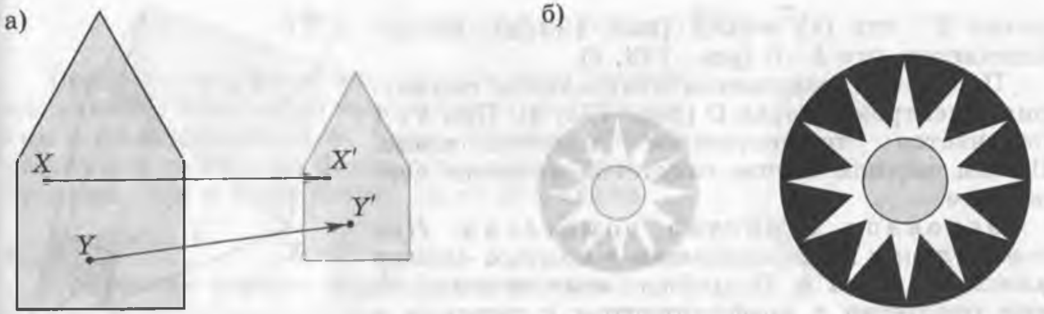



Рис. 132

ние называется **подобным** (или **подобием**), а это число называется **коэффициентом подобия.** Например, при увеличении фотографии все размеры (расстояния на фотографии) увеличиваются в одном и том же отношении, т. е. происходит подобное преобразование изображения с фотопленки на фотобумагу. Подобное преобразование совершается и тогда, когда делают уменьшенную копию чертежа, рисунка и т. п. Так, например, вы поступаете, когда срисовываете с доски чертеж в свою тетрадь.

Итак, **подобием фигуры с коэффициентом** $k>0$ называется такое ее преобразование, при котором любым двум точкам $X$ и $Y$ фигуры сопоставляются такие точки $X'$ и $Y'$, что $X'Y'=kXY$ (рис. 132, *а*).

**Фигура $F'$ называется подобной фигуре $F$ с коэффициентом $k$,** если существует подобие с коэффициентом $k$, переводящее $F$ в $F'$. Обозначение подобия $\sim$.

Подобные фигуры имеют одинаковую форму, но, вообще говоря, различные размеры (рис. 132, *б*). В частном случае $k$ может быть равно 1, и потому движение является подобием. Простейшим, но важным примером подобия, отличным от движения, является гомотетия («гомотетичный» в переводе с греческого означает «равнорасположенный»).

## 31.2. Гомотетия

**Гомотетия с центром $O$ и коэффициентом $k$** (отличным от нуля) — это преобразование, при котором каждой точке $X$ сопоставляется такая точка $X'$, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (рис. 133, *а*). Не исключается, что $k < 0$ (рис. 133, *б*).

При $k = -1$ получается центральная симметрия с центром в точке $O$ (рис. 133, *в*). При $k = 1$ получается тождественное преобразование. В этом частном случае гомотетия является движением.

Основное свойство гомотетии. *При гомотетии с коэффициентом $k$ каждый вектор умножается на $k$.* Подробнее: если точки $A$, $B$ при гомотетии с коэффициентом $k$ перешли в точки $A'$, $B'$, то

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть точка $O$ — центр гомотетии. Тогда $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. Поэтому $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}$. ■

Из равенства $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ следует, что $A'B' = |k|AB$. Последнее равенство означает, что *гомотетия с коэффициентом $k$ является подобием с коэффициентом $|k|$.*

Мы уже говорили, что гомотетия важна. Дело в том, что любое подобие с коэффициентом $k$ можно осуществить, выполнив сначала гомотетию с коэффициентом $k$ (и любым центром), а затем движение. Другими словами, *подобие с коэффициентом $k$ есть композиция гомотетии с коэффициентом $k$ и движения.*

**Доказательство.** Пусть фигура $F'$ получена из фигуры $F$ подобием с коэффициентом $k$ (рис. 134). Гомотетией с коэффициентом $k$ (и любым центром) переведем фигуру $F$ в фигуру $F_1$. Тогда любым точкам $X$, $Y$ фигуры $F$ ставятся в соответствие такие точки $X_1$, $Y_1$, что $X_1Y_1 = kXY$. Но и для точек $X'$, $Y'$ фигуры $F'$, соответствующих точкам $X$, $Y$, также $X'Y' = kXY$. Поэтому $X'Y' = X_1Y_1$. Это равенство верно для любых точек $X_1$, $Y_1$ фигуры $F_1$. Следовательно, фигуры $F_1$ и $F'$ равны, т. е. $F_1$ можно некоторым движением перевести в фигуру $F'$. ■

Свойства движений нам известны. Сейчас мы установим свойства гомотетии. Так как подобие сводится к последовательному выполнению гомотетии и движения (т. е. к композиции гомотетии и движения), то сразу после этого мы выясним и свойства подобия.

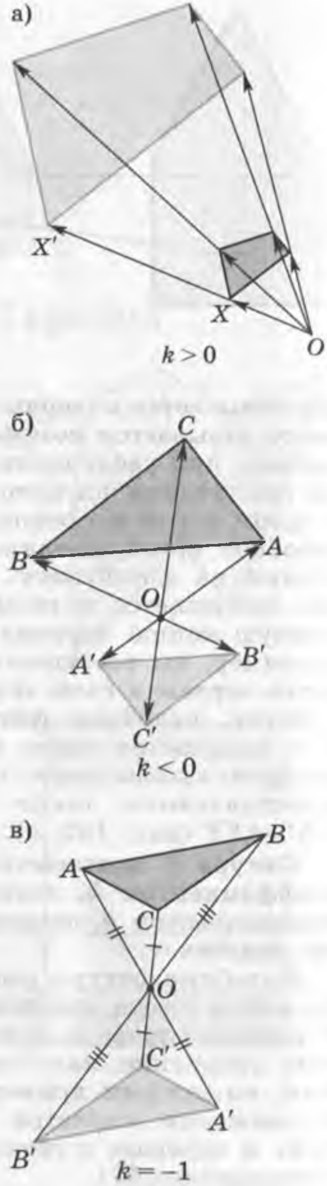



Рис. 133

## 31.3. Свойства гомотетии

Сразу договоримся, что везде в этом пункте мы считаем некоторую точку $O$ центром гомотетии с коэффициентом $k$. Далее, образы точек в результате гомотетии будем обозначать теми же буквами, что и сами точки, но со штрихами.

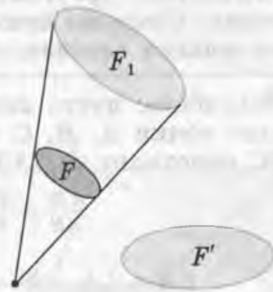


Рис. 134

**Свойство 1.**

**Гомотетия отрезок переводит в отрезок.**

**Доказательство.** Пусть гомотетия переводит концы отрезка $AB$ в точки $A'$, $B'$ (рис. 135, *а*). Точка $X \in AB$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. При этом если число $t$ возрастает от 0 до 1, то $X$ пробегает отрезок $AB$ от $A$ к $B$.

По основному свойству гомотетии $\overrightarrow{A'X'} = k\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Из этих равенств $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'X'}$ и $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'}$. Подставим эти значения $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{AB}$ в равенство $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$. Получим $\frac{1}{k}\overrightarrow{A'X'} = t\frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'}$, откуда $\overrightarrow{A'X'} = t\overrightarrow{A'B'}$. А это равенство означает, что, когда число $t$ возрастает от 0 до 1, точка $X'$ пробегает отрезок $A'B'$. ■

**Свойство 2.**

**Гомотетия сохраняет величину угла.**

Подробнее: для любых точек $A$, $B$, $C$ и соответствующих точек $A'$, $B'$, $C'$ выполняется равенство $\angle B'A'C' = \angle BAC$ (рис. 135, *б*).

**Доказательство.** Обозначим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b}' = \overrightarrow{A'B'}$ и $\vec{c}' = \overrightarrow{A'C'}$. Тогда $\angle BAC = \angle \vec{b}\vec{c}$ и $\angle B'A'C' = \angle \vec{b}'\vec{c}'$. По основному свойству гомотетии $\vec{b}' = k\vec{b}$ и $\vec{c}' = k\vec{c}$. Отсюда получаем, что $|\vec{b}'| = |k|\,|\vec{b}|$ и $|\vec{c}'| = |k|\,|\vec{c}|$. Кроме того,

$$\vec{b}' \cdot \vec{c}' = (k\vec{b}) \cdot (k\vec{c}) = k^2(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Но тогда

$$\cos\angle \vec{b}'\vec{c}' = \frac{\vec{b}' \cdot \vec{c}'}{|\vec{b}'||\vec{c}'|} = \frac{k^2(\vec{b} \cdot \vec{c})}{|k|\,|\vec{b}||k||\vec{c}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|} = \cos\angle \vec{b}\vec{c}.$$

Из равенства косинусов и следует равенство углов. ■

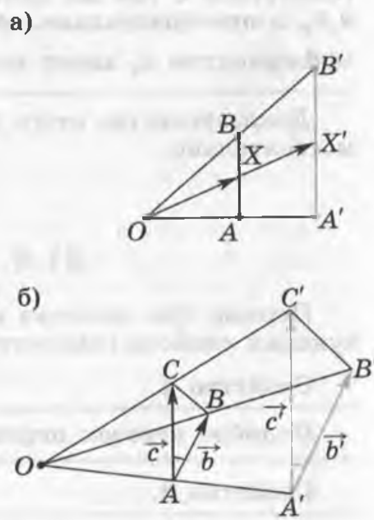


Рис. 135

**Свойство 3.**

**Гомотетия треугольник переводит в треугольник. Стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.**

Подробнее: пусть дан $\triangle ABC$ и гомотетия переводит точки $A$, $B$, $C$ в точки $A'$, $B'$, $C'$. Тогда $\triangle ABC$ переходит в $\triangle A'B'C'$ и при этом

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC} \qquad (2)$$

и

$$\angle A'=\angle A,\ \angle B'=\angle B,\ \angle C'=\angle C. \qquad (3)$$

**Доказательство.** То, что треугольник $ABC$ переходит в треугольник $A'B'C'$, вытекает из свойства 1. Действительно, треугольник $ABC$ заполняют отрезки $AX$, где $X\in BC$. Эти отрезки переходят в отрезки $A'X'$, причем $X'\in B'C'$. Отрезки $A'X'$ и заполняют треугольник $A'B'C'$. Пропорциональность сторон вытекает из равенства (1), а равенство углов следует из свойства 2. ■

**Свойство 4.**

**Совокупность всех гомотетий плоскости с общим центром является группой преобразований плоскости. При этом композиция двух гомотетий с общим центром и коэффициентами $k_1$, $k_2$ будет гомотетией с тем же центром и коэффициентом $k_1k_2$, а преобразование, обратное гомотетии с коэффициентом $k$, имеет коэффициент $\frac{1}{k}$.**

Доказательство этого свойства приведите самостоятельно.

## 31.4. Свойство подобия

Первые три свойства вытекают из соответствующих свойств гомотетии и движения.

**Свойство 1.**

**Подобие отрезок переводит в отрезок.**

**Свойство 2.**

**Подобие сохраняет величину угла.**

**Свойство 3.**

**Подобие переводит треугольник в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны (рис. 136).**

(Соответственные стороны — это сторона и ее образ. Аналогично и для углов.)

Эти свойства докажите самостоятельно.

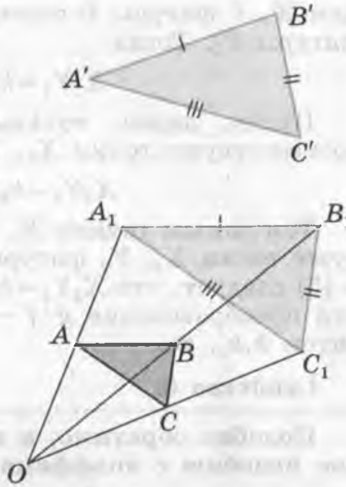



Рис. 136

**Свойство 4.**

**В результате подобия с коэффициентом $k$ площадь фигуры умножается на $k^2$.**

**Доказательство.** Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними. В результате подобия с коэффициентом $k$ каждая сторона умножается на $k$, а углы сохраняются. Поэтому площадь треугольника умножается на $k^2$.

Многоугольные фигуры слагаются из треугольников. Так как площадь каждого умножается на $k^2$, то и вся сумма умножится на $k^2$, поэтому площадь многоугольной фигуры умножится на $k^2$. ■

**Свойство 5.**

**Композиция подобий с коэффициентами $k_1$, $k_2$ есть подобие с коэффициентом $k_1k_2$.**

**Доказательство.** Пусть фигура $P$ подобием $f$ с коэффициентом $k_1$ переводится в фигуру $P_1$, а затем фигура $P_1$ подобием $g$ с коэффициентом $k_2$ переводится в фигуру $P_2$ (рис. 137). Пусть точ-

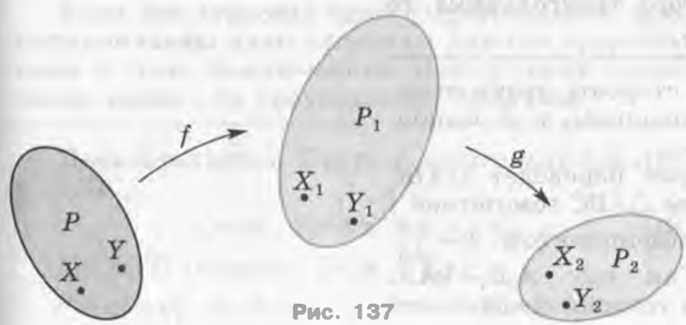



Рис. 137

кам $X$, $Y$ фигуры $P$ соответствуют точки $X_1$, $Y_1$ фигуры $P_1$. Тогда

$$X_1Y_1 = k_1XY. \qquad (4)$$

Пусть, далее, точкам $X_1$, $Y_1$ фигуры $P_1$ соответствуют точки $X_2$, $Y_2$ фигуры $P_2$. Тогда

$$X_2Y_2 = k_2X_1Y_1. \qquad (5)$$

Тем самым точкам $X$, $Y$ фигуры $P$ соответствуют точки $X_2$, $Y_2$ фигуры $P_2$ и из равенств (4) и (5) следует, что $X_2Y_2 = k_1k_2XY$. Это и означает, что преобразование $g \circ f$ — подобие с коэффициентом $k_1k_2$. ■

**Свойство 6.**

**Подобие обратимо, и преобразование, обратное подобию с коэффициентом $k$, есть подобие с коэффициентом $\frac{1}{k}$.**

Это свойство докажите самостоятельно.

Из свойств 5 и 6 вытекает, что *множество всех подобий плоскости является группой преобразований плоскости.*

## 31.5. Признаки подобия треугольников

Как мы установили, у подобных треугольников соответственные стороны пропорциональны, а соответственные углы равны. Чтобы установить подобие двух треугольников, достаточно наличия части этих свойств.

**Теорема 36** *(первый признак подобия).*

**Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.**

**Доказательство.** Пусть стороны треугольников $ABC$ и $A'B'C'$ пропорциональны, т. е. выполняются равенства (2).

Укажем подобие, которое переведет $\triangle ABC$ в $\triangle A'B'C'$. Сначала переведем $\triangle ABC$ гомотетией $f$ с любым центром и коэффициентом $k = \frac{A'B'}{AB}$ в $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 136). Так как $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$ и $A_1C_1 = kAC$, а из условия следует, что

$A'B' = kAB$, $B'C' = kBC$ и $A'C' = kAC$, то $A'B' = A_1B_1$, $B'C' = B_1C_1$ и $A'C' = A_1C_1$. Поэтому $\triangle A'B'C' = \triangle A_1B_1C_1$. По теореме 34 п. 28.1 о задании движения найдется такое движение $g$, которое переводит $\triangle A_1B_1C_1$ в $\triangle A'B'C'$. Выполнив сначала гомотетию $f$, а затем движение $g$, мы осуществим подобие $g \circ f$, которое переводит треугольник $ABC$ в треугольник $A'B'C'$. ■

**Теорема 37** *(второй признак подобия).*

---

**Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

---

Доказательство. Пусть в треугольниках $ABC$ и $A'B'C'$ $\angle A' = \angle A$ и $\angle B' = \angle B$. Тогда и $\angle C' = \angle C$. По теореме синусов из треугольника $ABC$ получим, что

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}. \qquad (6)$$

Аналогично из треугольника $A'B'C'$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin A'}{\sin B'}. \qquad (7)$$

Так как $\angle A' = \angle A$, то $\sin A' = \sin A$, а так как $\angle B' = \angle B$, то $\sin B' = \sin B$. Поэтому отношения в правых частях равенств (6) и (7) равны, а потому $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Следовательно, $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. Аналогично получаем, что $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$.

Итак, стороны треугольников $ABC$ и $A'B'C'$ пропорциональны. По теореме 36 эти треугольники подобны. ■

**Теорема 38** *(третий признак подобия).*

---

**Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.**

---

Доказательство. Пусть у треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$

$$a_1 = ka, \; b_1 = kb, \; \angle C_1 = \angle C. \qquad (8)$$

По ОТП (теорема 11 п. 10.1)

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos C_1, \; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

А так как $a_1 = ka$, $b_1 = kb$ и $\cos C_1 = \cos C$, то $c_1^2 = k^2a^2 + k^2b^2 - 2k^2ab\cos C = k^2(a^2 + b^2 - 2ab\cos C) = k^2c^2$.

Поскольку $c_1^2 = k^2c^2$, то $c_1 = kc$ и, стало быть, все стороны треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ пропорциональны. По первому признаку подобия эти треугольники подобны. ■

## 31.6. Метод подобия

При решении задач на построение методом подобия всегда приходится решать следующую задачу:

**Задача** *(построение четвертого пропорционального отрезка). Даны три отрезка a, b, c. Построить такой отрезок x, что* $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

**Решение.** Возьмем любой угол $O$. На одной его стороне отложим отрезки $OA = a$ и $OC = c$, а на другой — отрезок $OB = b$ (рис. 138, *а*). Через точку $C$ проведем прямую $p \parallel AB$. Она пересечет луч $OB$ в точке $D$. Докажем, что $OD$ — искомый отрезок $x$. Треугольники $OAB$ и $OCD$ подобны (по второму признаку подобия). Поэтому $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$, т. е. $OD = x$. ■

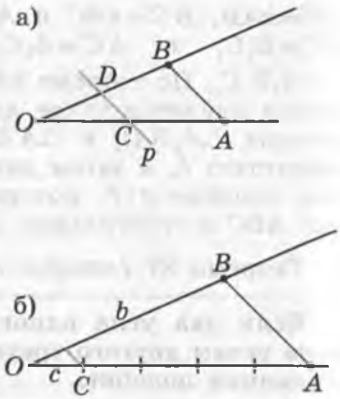


Рис. 138

В частном случае эта задача позволяет разделить отрезок на $n$ равных частей. Обозначим данный отрезок $b$. Возьмем любой отрезок $c$, и пусть $a = nc$ (рис. 138, *б*). Поскольку $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, то $x = \frac{b}{a}c = \frac{b}{nc}c = \frac{1}{n}b$. ■

Решая задачу методом подобия, в частности гомотетией, сначала строим фигуру, удовлетворяющую всем требованиям задачи, кроме одного. А затем с помощью подобия строим искомую фигуру. Вот такая задача:

**Задача.** *Построить квадрат так, чтобы три его вершины лежали на катетах, а четвертая — на гипотенузе прямоугольного треугольника.*

**Построение.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ построим какой-нибудь квадрат $CKLM$ так, что точка $K$ лежит на $CA$, а точка $M$ — на $CB$ (рис. 139, *а*). Неважно, где при этом окажется точка $L$: внутри треугольника $ABC$ или вне его (если она окажется на стороне $AB$, то задача уже решена). Проведем луч $CL$. Пусть он пере-

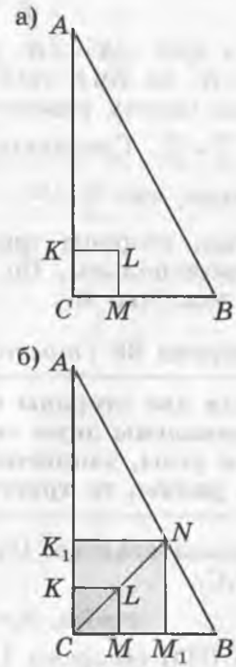


Рис. 139

секает $AB$ в точке $N$. Из точки $N$ проводим перпендикуляры на катеты: $NK_1 \perp CA$, $NM_1 \perp CB$. Четырехугольник $CK_1NM_1$ — квадрат, который нам нужен (рис. 139, *б*).

Докажем это. Так как в нем три угла прямые, то $CK_1NM_1$ — прямоугольник. Осталось доказать равенство его соседних сторон. Треугольники $CKL$ и $CK_1N$ подобны, так как имеют по два равных угла. Из их подобия следует, что $\frac{NK_1}{LK} = \frac{K_1C}{KC}$. Так как $LK = KC$, то $NK_1 = K_1C$. ■

Эту задачу легко решить и не пользуясь методом подобия (как?). Но если ее обобщить и поставить, например, задачу о построении прямоугольника, так же расположенного, как и квадрат, но с отношением сторон 2 : 1, то срабатывает как раз указанный метод построения.

Используя подобие, докажем еще раз теорему 30 о точке пересечения медиан треугольника (см. п. 24.6).

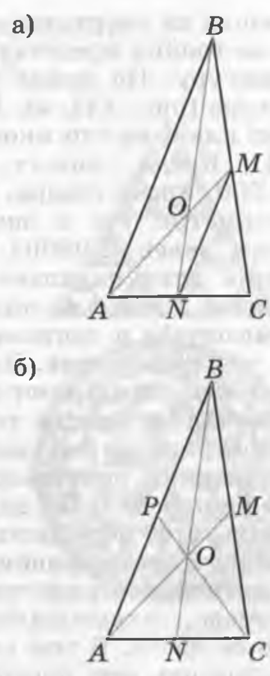


Рис. 140

Пусть медианы $AM$ и $BN$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$ (рис. 140, *а*). Проведем среднюю линию $MN$. Напомним, что $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$. Поэтому треугольник $OAB$ подобен треугольнику $OMN$ с коэффициентом подобия 2. Следовательно,

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = 2.$$

Покажем, что и медиана $CP$ проходит через точку $O$ (рис. 140, *б*). Повторим проведенные рассуждения для медиан $AM$ и $CP$. Снова получим, что они пересекаются в такой точке на медиане $AM$, которая делит $AM$ в отношении 2 : 1. Этой точкой является точка $O$. Поэтому $CP$ проходит через $O$. ■

## 31.7. Подобие при изображении плоских фигур

Подобие фигур лежит в основе их изображения: правильное, не искаженное изображение подобно изображаемому (рис. 141, *а*). Всякий план, будь то план города или квартиры, представляет собой подобное изображение. Изображаемый объект рассматривается как плоская фигура, и в плане рисуется подобная ей фигура. Например, город представляется как фигура, состоящая из кварталов застройки и улиц; кварталы застройки представляют собой многоугольную фигуру. На плане изображается подобная ей фигура (рис. 141, *б*). Масштаб, в котором выполнен план, не что иное, как коэффициент подобия. Когда пишут, например, масштаб 1:100 000, иначе говоря, масштаб — 1 километр в сантиметре, это и значит, что коэффициент подобия равен 0,00001. При этом численные значения длин на плане те же, что в действительности. Только на плане эти значения берутся в масштабе в сантиметрах, а в действительности — в километрах. Пользуясь планами и картами, так и определяют по ним расстояния.

**Замечание.** Вполне точное изображение земной поверхности на картах невозможно: отношения длин неизбежно искажаются, так как Земля не плоская. Но для сравнения небольших участков это несущественно. Поэтому, изображая на картах сравнительно небольшие участки земной поверхности, затем составляют из них атлас, охватывающий всю Землю или любую ее часть. В том случае, когда хотят точно изобразить всю поверхность Земли, изготовляют глобус.

а)

б)

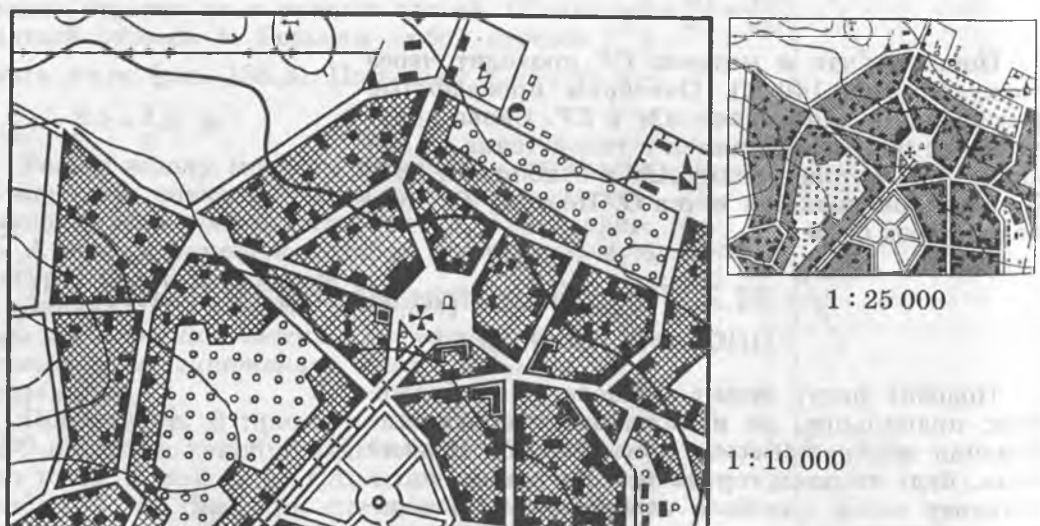



Рис. 141

## 31.8. Заполнение плоскости подобными фигурами

Орнамент, покрывающий плоскость (см. п. 29.4), состоит из равных друг другу фигур, каждая из которых получается из другой некоторым движением. Оказывается, что плоскость может быть покрыта и подобными (но не равными) друг другу фигурами (рис. 142). Фигуры, изображенные на рисунке 142, совмещаются друг с другом поворотной гомотетией (композицией поворота и гомотетии, имеющих общий центр). Подобие (точнее, ***самоподобие***) лежит в основе и так называемых **множеств Жюлио**, изучение которых началось в XX веке в новом разделе математики, называющимся **фрактальной геометрией**. Термин *фрактал* (от лат. fractus — изломанный, дробный) ввел в употребление в 1975 г. американский математик Бенуа Мандельброт. Фракталы поразили красотой и разнообразием форм не только математиков. Издаются красочные альбомы с изображением разнообразных множеств Жюлио. Примеры таких множеств показаны на рисунке 143.

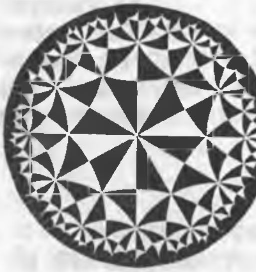


Рис. 142

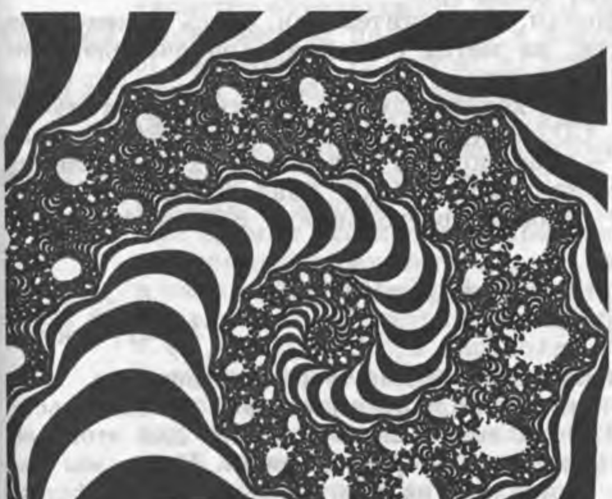


Рис. 143

## Вопросы

1. В чем заключается подобное преобразование фигуры? Приведите примеры такого преобразования.
2. Какие фигуры называются подобными?
3. В чем заключается гомотетичное преобразование фигуры?
4. Какие вам известны свойства: а) гомотетии; б) подобия?
5. Как построить треугольник, подобный данному? А многоугольник?
6. Какие признаки подобия треугольников вы знаете?
7. Откуда следует подобие: а) равносторонних треугольников; б) квадратов; в) правильных $n$-угольников; г) окружностей?
8. Как используется подобие для решения задач?
9. Что такое масштаб с точки зрения подобия?
10. Вам нужно узнать, подобны ли две данные фигуры. Как вы будете действовать?

## Задачи к § 31

### Разбираемся в решении

**31.1** **8** Используя теорему об отношении площадей подобных треугольников, докажите теорему Пифагора.

**Решение.** Задача простая, но поучительная. Здесь важен не ее результат — он известен, не метод решения — он очевиден, но важно осмысление этой задачи.

Сначала дадим все-таки доказательство. Пусть в треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой, $CD \perp AB$ (рис. 144), $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (?), значит, $S_1 = k_1^2 \cdot S$, где $k_1$ — коэффициент подобия этих треугольников, а $S$ — площадь треугольника $ABC$. Аналогично $S_2 = k_2^2 \cdot S$, где $k_2$ — коэффициент подобия треугольников $BCD$ и $ABC$. Поэтому

$$S = S_1 + S_2 = k_1^2 S + k_2^2 S = (k_1^2 + k_2^2)\,S.$$

Отсюда $k_1^2 + k_2^2 = 1$. Но $k_1 = \frac{b}{c}$, $k_2 = \frac{a}{c}$. А потому $\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$, откуда $a^2 + b^2 = c^2$, что и составляет содержание теоремы Пифагора.

Можно ли считать, что мы получили еще одно доказательство теоремы Пифагора? Пока нет. Дело в том, что для этого ее доказательства мы использовали теорию подобия. Когда мы занимались подобием, то опирались на тригонометрические функции, их свойства и их применения. А когда мы занимались тригонометрическими функциями, то использовали, в частности, теорему Пифагора. Поэтому возможна логическая ошибка, так называемый «порочный круг», т. е. для доказательства некоторого утверждения в неявном виде используется то, что требуется доказать.

В данном случае все можно проследить детально и выяснить, как обстоят дела на самом деле — есть «порочный круг» или его нет (?). Вместе с тем надо понимать, что изучение планиметрии могло бы идти и не в таком порядке, как у нас, и даже в известном смысле наоборот: сначала подобие, а затем теорема Пифагора. Именно так и делается в некоторых учебниках по геометрии.

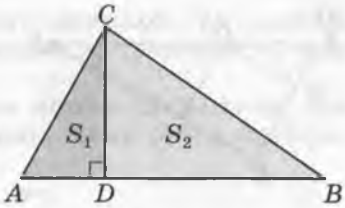


Рис. 144

Но что любопытно — теорему Пифагора можно вывести и без подобия, и без тригонометрических функций, а из одного только предположения: площадь прямоугольного треугольника с заданным острым углом пропорциональна квадрату гипотенузы (?).

## Дополняем теорию

**31.2** **1** а) Пусть фигура $F_2$ подобна фигуре $F_1$ с коэффициентом подобия $k$. С каким коэффициентом фигура $F_1$ подобна фигуре $F_2$?

б) Пусть фигура $F_2$ подобна фигуре $F_1$ с коэффициентом $k_1$, фигура $F_3$ подобна фигуре $F_2$ с коэффициентом $k_2$. С каким коэффициентом фигура $F_3$ подобна фигуре $F_1$?

**31.3** **1** Докажите, что в подобии: а) образ пересечения фигур является пересечением образов этих фигур; б) образ объединения фигур является объединением образов этих фигур.

**31.4** **2,3** Какая фигура получится в результате гомотетии: а) квадрата; б) окружности (и круга); в) полуплоскости?

**31.5** **2,3** Каким преобразованием является: а) преобразование, обратное гомотетии; б) композиция двух гомотетий с одним центром? Имеет ли гомотетия неподвижные точки?

**31.6** **4** Объясните, почему в результате подобия: а) перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые; б) параллельные прямые переходят в параллельные прямые; в) пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся прямые; г) касательная к окружности переходит в касательную к окружности.

**31.7** **4** Докажите, что в результате подобия сохраняется форма фигуры, т. е.: а) окружность переходит в окружность (круг — в круг); б) многоугольник переходит в многоугольник; в) правильный многоугольник переходит в правильный многоугольник; г) параллелограмм переходит в параллелограмм; д) прямоугольник переходит в прямоугольник; е) ромб переходит в ромб; ж) трапеция переходит в трапецию.

**31.8** **4** Докажите, что подобны: а) два квадрата; б) два правильных $n$-угольника; в) две окружности; г) два круга; д) две полосы; е) два прямоугольника, стороны которых пропорциональны; ж) два шара.

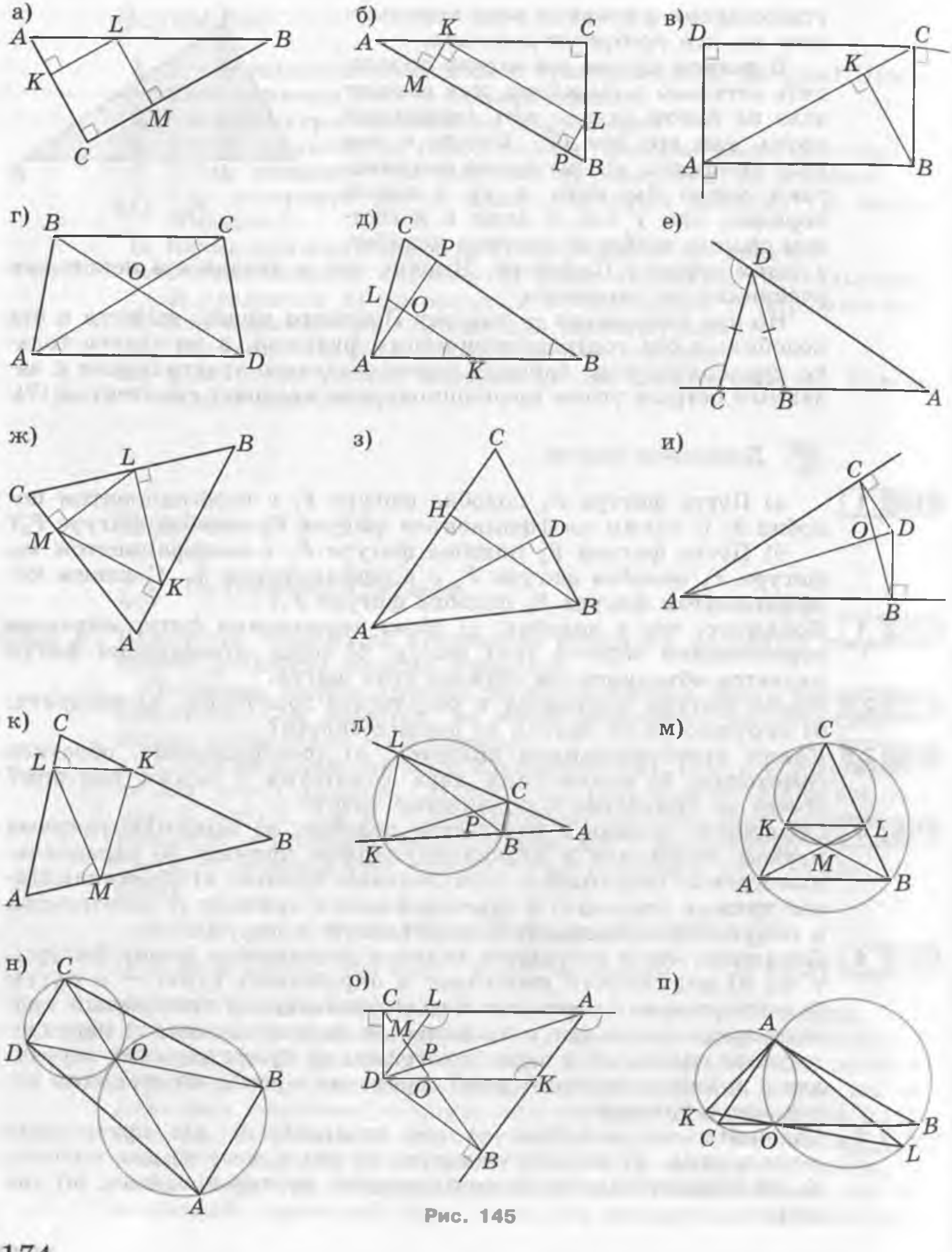

а) A L B K M C
б) A K C M L P B
в) D C K A B
г) B C O A D
д) C P L O A K B
е) D C B A
ж) B L C M K A
з) C H D A B
и) C O D A B
к) C L K B A M
л) L C P A K B
м) C K L M A B
н) C D O B A
о) C L A M P D O K B
п) A K B C O L

Рис. 145

**31.9** **4** Найдите признаки подобия: а) прямоугольников; б) ромбов; в) параллелограммов; г) равнобоких трапеций; д) трапеций; е) секторов; ж) сегментов; з) колец.

**31.10** **5** а) В треугольнике проведена средняя линия. Докажите, что она отсекает от него подобный треугольник. Чему равен коэффициент этого подобия?

б) Проверьте утверждение, обратное «а».

в) Обобщите утверждение «а».

**31.11** **5** Из точки $O$ выходят лучи $a$, $b$, $c$. На луче $a$ находятся точки $A$ и $A_1$, на луче $b$ — точки $B$ и $B_1$, на луче $C$ — точки $C$ и $C_1$. При этом $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1A_1 \parallel CA$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $ABC$ подобны. Докажите то же, если точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ взяты на продолжениях лучей.
Обобщите задачу на пространство.

**31.12** **6** На одной стороне угла отложили равные отрезки и через их концы провели параллельные прямые, пересекающие стороны угла. Докажите, что на другой стороне угла получатся равные отрезки.

Это утверждение называют теоремой Фалеса — по имени знаменитого древнегреческого мыслителя Фалеса Милетского — ок. 625 — ок. 547 г. до н. э.

**31.13** **6** Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки. Докажите.

**31.14** **6** Разделите циркулем и линейкой отрезок в данном отношении, заданном: а) отрезками; б) целыми числами.

### Смотрим

**31.15** **5** Укажите пары подобных треугольников на рисунке 145.

**31.16** **5** Чему равен неизвестный отрезок на рисунке 146?

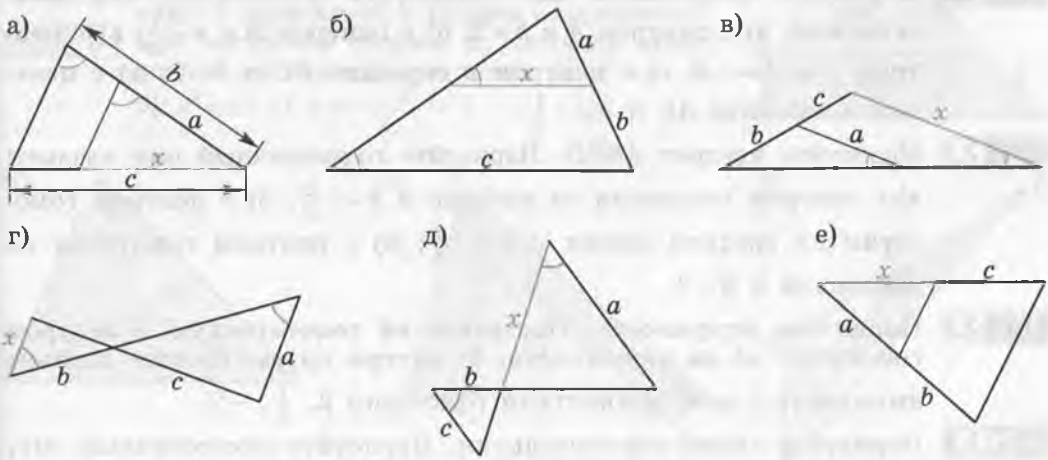



Рис. 146

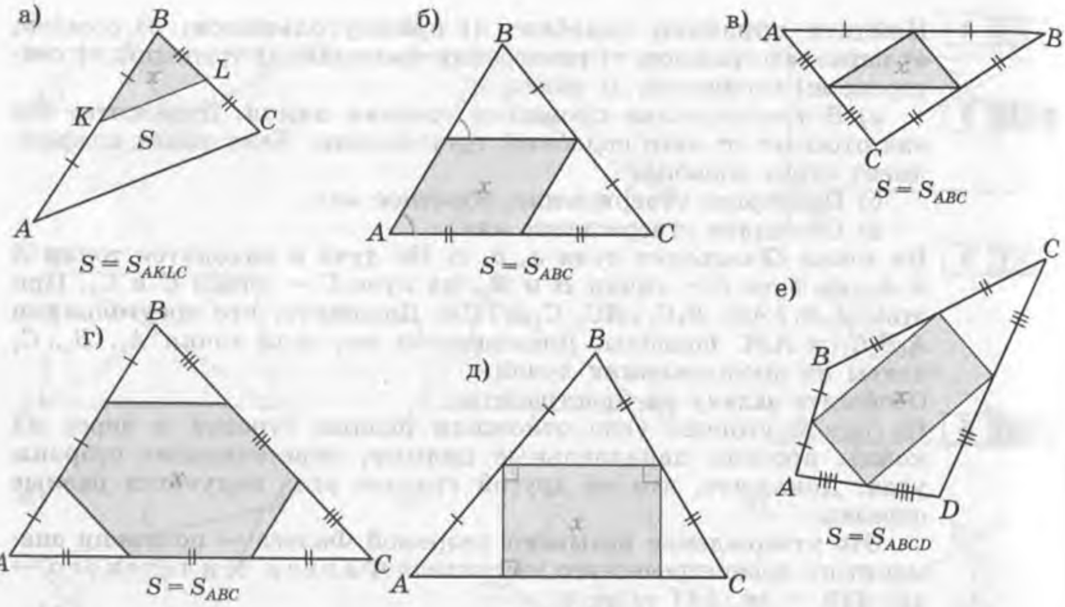



Рис. 147

**31.17** 5 Какую часть составляет площадь $x$ от площади $S$ данной фигуры на рисунке 147?

## Рисуем

**31.18** 2,3 Нарисуйте треугольник $ABC$. Нарисуйте треугольник, ему гомотетичный: а) с центром $A$ и $k=2$; б) с центром $B$ и $k=\frac{1}{2}$; в) с центром $C$ и $k=-2$; г) с центром в середине $BC$ и $k=2$; д) с центром в середине $AC$ и $k=-\frac{1}{2}$.

**31.19** 2,3 Нарисуйте квадрат $ABCD$. Нарисуйте гомотетичный ему квадрат: а) с центром гомотетии на стороне и $k=-\frac{2}{3}$; б) с центром гомотетии на средней линии и $k=-\frac{1}{3}$; в) с центром гомотетии на диагонали и $k=2$.

**31.20** 2,3 Нарисуйте окружность. Постройте ей гомотетичную с центром гомотетии: а) на окружности; б) внутри круга. Каждое задание выполните с коэффициентами гомотетии 2, $\frac{1}{2}$, $-2$.

**31.21** 2,3 Нарисуйте любой многоугольник. Нарисуйте гомотетичный ему, взяв центр гомотетии: а) в вершине; б) в произвольной точке.

**31.22** **2,3** Поупражняйтесь в рисовании гомотетичных фигур в пространстве. Нарисуйте куб, выберите сами центр гомотетии и ее коэффициент. Постройте куб, гомотетичный данному.
Решите аналогичные задачи для правильного тетраэдра и правильной четырехугольной пирамиды.

### Планируем

**31.23** **4** Как разделить прямоугольник на 2 прямоугольника так, чтобы получить: а) два подобных прямоугольника; б) две пары подобных прямоугольников; в) три пары подобных прямоугольников?

**31.24** **5** Дан равнобедренный треугольник. Как найти расстояние между точками на боковых сторонах, если эти точки являются концами отрезка: а) соединяющего концы высот, проведенных из вершин основания; б) соединяющего концы биссектрис углов при основании; в) соединяющего концы отрезков, проведенных из вершин основания через середину оси симметрии; г) соединяющего точки касания вписанной окружности с боковыми сторонами; д) касательного к вписанной окружности и параллельного основанию?

**31.25** **5** Имеются два куска проволоки разной длины. Сгибая их, можно получить два подобных треугольника. Как это сделать?

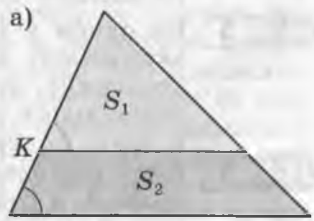
**31.26** **5** Как выбрать точки внутри сторон данного треугольника, чтобы треугольник с вершинами в этих точках был подобен данному?

**31.27** **5** В каждом из данных треугольников можно выбрать точку $K$ так, чтобы $S_1 = S_2$ (рис. 148). Объясните, почему это можно сделать. Где для этого выбрать точку $K$?

**31.28** **5** Как найти площадь треугольника, зная его высоты?

**31.29** **5** Как построить треугольник, подобный данному и вписанный в данную окружность?

**31.30** **6** Как построить отрезок $x$, который выражается такими формулами: а) $x^2 = a \cdot b$; б) $x^2 = a$; в) $x = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$?

а)


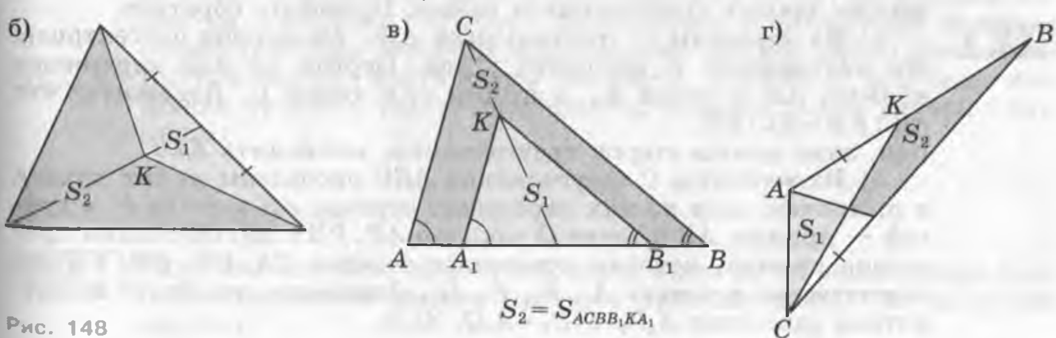

б) в) г)



Рис. 148

## Доказываем

**31.31** **1** Даны отрезок $AB$ и отрезок $AB_1 = 2AB$. Пусть каждой точке $X \in AB$ соответствует точка $X_1 \in AB_1$, такая, что $AX_1 = 2AX$. Докажите, что такое преобразование $AB$ является подобием. Укажите подобное преобразование $AB_1$ в $AB$.

**31.32** **1** Докажите, что подобны две дуги одной и той же окружности. Приведите другие примеры подобных фигур.

**31.33** **1** Докажите, что в подобных многоугольниках соответственные углы равны.

**31.34** **1** Пусть два многоугольника подобны с коэффициентом $k$. Докажите, что: а) отношение их периметров равно $k$; б) отношение их площадей равно $k^2$; в) отношение их радиусов описанных окружностей равно $k$; г) отношение их радиусов вписанных окружностей равно $k$.

**31.35** **2,3** Докажите, что гомотетичны: а) две параллельные прямые; б) основания трапеции; в) два неравных треугольника с соответственно параллельными сторонами; г) две окружности.

**31.36** **2,3** Докажите, что композиция любого числа гомотетий является гомотетией или параллельным переносом.

**31.37** **2,3** Пусть композицией двух гомотетий является гомотетия. Докажите, что центры всех трех гомотетий лежат на одной прямой.

**31.38** **5** Имеются два подобных треугольника с коэффициентом подобия $k > 2$. Периметр большего из них на единицу превосходит периметр другого. Докажите, что: а) периметр большего треугольника меньше 2; б) площадь меньшего треугольника меньше $\frac{1}{2}$.

**31.39** **5** На одном и том же отрезке построены по разные стороны полуокружность и равносторонний треугольник. Через вершину треугольника, не лежащую на взятом отрезке, проводится прямая, отсекающая треть данного отрезка. Докажите, что она отсекает и треть полуокружности.

**31.40** **5** Два треугольника имеют равные основания, лежащие на одной прямой, и равные площади. Эти треугольники пересекает прямая, параллельная их основаниям. Докажите, что отрезки этой прямой внутри данных треугольников равны. Проверьте обратное.

**31.41** **6** а) Из вершины $C$ треугольника $ABC$ проведены биссектрисы его внутреннего и внешнего углов. Первая из них пересекает прямую $AB$ в точке $K$, а вторая — в точке $L$. Докажите, что $AK : KB = AL : LB$.

Как, зная длины сторон треугольника, вычислить $KL$?

б) Из вершины $C$ треугольника $ABC$ проведены любые лучи $p$ и $q$, причем один из них пересекает отрезок $AB$ в точке $P$, а другой — прямую $AB$ в точке $Q$ так, что $AP : PB = AQ : QB$. Затем проведена прямая, которая пересекает отрезки $CA$, $CP$, $CB$, $CQ$ соответственно в точках $A_1$, $P_1$, $B_1$, $Q_1$. Докажите, что будет выполняться равенство $A_1P_1 : P_1B_1 = A_1Q_1 : Q_1B_1$.

**31.42** **6** Нарисуйте отрезок $AB$. Постройте окружность, проходящую через точки $A$ и $B$. Проведите ее диаметр, перпендикулярный $AB$. Пусть он пересекает окружность в точках $C$ и $D$. Возьмите на отрезке $AB$ точку $P$. Проведите прямую $DP$. Пусть она пересекает окружность в точке $Q$. Проведите прямую $CQ$. Пусть она пересекает прямую $AB$ в точке $R$. Докажите, что $AP:PB=AR:RB$. Исходя из этого построения предложите способ построения четвертого пропорционального отрезка.

**31.43** **6** Дадим определение золотого сечения. Пусть дан отрезок $AB$. Говорят, что точка $C$ отрезка $AB$ делит его в отношении золотого сечения, если $AB:CB=CB:AC$. Известно, что это отношение равно $(\sqrt{5}+1):2$. Нарисуйте отрезок $AB$. Пусть точка $C$ делит его в отношении золотого сечения. На отрезке $AC$ отложите отрезок $CD=CB$. Докажите, что точка $D$ делит $AC$ в отношении золотого сечения.

**31.44** **6** Пусть точка $K$ — середина стороны $AB$ квадрата $ABCD$. Проведите окружность с центром $K$ радиусом $KC$. Точку ее пересечения с лучом $AB$ обозначим $L$. Докажите, что точка $B$ делит отрезок $AL$ в отношении золотого сечения.

**31.45** **6** Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36°. Докажите, что биссектриса угла при основании делит боковую сторону в отношении золотого сечения.

**31.46** **6** Прямоугольник назовем «золотым», если отношение его сторон равно отношению золотого сечения. От «золотого» прямоугольника отрезали квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Докажите, что остался «золотой» прямоугольник.

**31.47** **6** Пусть $ABCD$ и $A_1CD_1B_1$ — два «золотых» прямоугольника (см. задачу 31.46), расположенные по разные стороны от прямой $BC$, $A_1 \in BC$. Соедините точки $B$ и $D_1$ отрезком и нарисуйте прямоугольник $BKLD_1$, где точка $K$ лежит на стороне $AD$. Докажите, что: а) $BKLD_1$ не простой, а «золотой» прямоугольник; б) площадь $BKLD_1$ равна сумме площадей данных прямоугольников.

**31.48** **6** Используя гомотетию, докажите, что: а) средняя линия треугольника параллельна его стороне и равна половине этой стороны; б) три медианы треугольника пересекаются в одной точке; в) точка пересечения диагоналей трапеции лежит на средней линии ее оснований; г) точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежит на продолжении средней линии оснований.

**31.49** **6** Внутри данного круга взяты две точки. Докажите, что через них можно провести такую окружность, которая лежит внутри этого круга.

### Исследуем

**31.50** **1** Подобны ли два четырехугольника, если: а) стороны одного пропорциональны сторонам другого; б) углы одного равны углам другого?

**31.51** **1** Являются ли подобиями преобразования плоскости приведенные в задаче 26.6?

**31.52** **1** Подобны ли: а) две сферы; б) два куба; в) два правильных тетраэдра; г) два цилиндра; д) два конуса; е) два прямоугольных параллелепипеда?

**31.53** **2,3** Нарисуйте отрезок $AB$. Пусть точка $B$ является образом точки $A$ в результате гомотетии. Где находится центр этой гомотетии, если $k = 2$, $\frac{1}{3}$, $-4$?

**31.54** **2,3** Стороны двух неравных квадратов соответственно параллельны. Гомотетичны ли эти квадраты?

**31.55** **4** Стороны прямоугольника равны 6 и 2. Перпендикулярно большей стороне проведена прямая так, что она отсекает прямоугольник со сторонами 1 и 2. а) Есть ли на рисунке подобные прямоугольники? б) Пусть эта прямая движется, оставаясь параллельной самой себе. Могут ли на рисунке появиться подобные прямоугольники?

Рассмотрите три случая: 1) подобие частичных прямоугольников; 2) подобие большего частичного исходному прямоугольнику; 3) подобие меньшего частичного исходному прямоугольнику.

**31.56** **4** Внутри диагонали прямоугольника взята точка. а) Из нее опустите перпендикуляры на две соседние стороны прямоугольника. Получился ли при этом прямоугольник, подобный данному? б) Опустите из нее перпендикуляры на все стороны прямоугольника. Сколько получилось прямоугольников, подобных данному?

**31.57** **4** Из точки внутри прямоугольника провели перпендикуляры на две соседние стороны. Будет ли полученный прямоугольник подобен данному?

**31.58** **4** Можно ли разбить квадрат на два подобных прямоугольника?

**31.59** **4** а) Средняя линия прямоугольника отсекла от него прямоугольник, подобный данному. Какой зависимостью связаны его стороны?

б) Одна из средних линий прямоугольника отсекла от него прямоугольник, подобный данному. Будет ли другая средняя линия обладать таким же свойством?

**31.60** **4** Из прямоугольника $ABCD$ вырезали квадрат $ABKL$. При каком условии прямоугольник $KLDC$ подобен исходному прямоугольнику? Пусть это условие выполнено. Повторим эту операцию с прямоугольником $KLDC$. Будет ли вновь полученный прямоугольник подобен данному?

**31.61** **4** Можно ли в данном прямоугольнике выбрать по одной точке на каждой его стороне так, чтобы они были вершинами прямоугольника, подобного данному?

**31.62** **4** а) Через точку внутри диагонали параллелограмма проведены его хорды, параллельные сторонам. Получатся ли при этом подобные параллелограммы?

б) Из вершин параллелограмма проведены перпендикуляры на его диагонали. Докажите, что полученные четыре проекции его вершин являются вершинами параллелограмма, подобного данному.

в) Из вершин тупых углов параллелограмма провели перпендикулярные к его сторонам прямые. Могут ли полученные при этом точки пересечения этих прямых быть вершинами параллелограмма, подобного данному?

г) Обобщите задачу «б».

**31.63** 4 В данной трапеции проведите прямую, параллельную основаниям. Может ли при этом оказаться так, что: а) меньшая трапеция подобна исходной; б) бóльшая трапеция подобна исходной; в) меньшая трапеция подобна большей; г) подобны все три трапеции?

Если все эти случаи возможны, то, зная стороны трапеции, как вы вычислите длину проведенной хорды?

**31.64** 4 Можно ли проверить подобие двух четырехугольников, измеряя только углы?

**31.65** 4 Можно ли круг разделить на два подобных сегмента?

**31.66** 4 На сторонах прямоугольного треугольника построены подобные многоугольники. Верна ли для них теорема, аналогичная теореме Пифагора?

**31.67** 5 Найдите признаки подобия: а) прямоугольных треугольников; б) равнобедренных треугольников.

**31.68** 5 В трапеции $ABCD$ проведены диагонали и через точку их пересечения проведена хорда, параллельная основаниям. а) Укажите все пары подобных треугольников на этом рисунке. б) Как найти длину этой хорды в трапеции, в которой известны все стороны? в) Докажите, что в равнобокой трапеции эта хорда делит пополам угол между диагоналями. г) Будет ли такое свойство хорды характерным для равнобокой трапеции? д) Чему равен отрезок средней линии боковых сторон трапеции, заключенный между ее диагоналями, если основания трапеции равны $d_1$ и $d_2$?

**31.69** 5 Хорда угла движется параллельно самой себе. Какую фигуру образуют ее середины? Обобщите задачу.

**31.70** 5 В треугольнике будем проводить хорды из вершины. Каждый из двух треугольников, полученных при этом, будем называть частичным треугольником. а) Как провести хорду, чтобы один из частичных треугольников был подобен данному? б) Можно ли провести хорду так, чтобы оба частичных треугольника были подобны данному? в) Можно ли провести хорду так, чтобы частичные треугольники были подобны между собой? г) В каком треугольнике частичные треугольники подобны между собой и данному треугольнику? д) Пусть два треугольника разбиты на частичные треугольники. Пусть исходные треугольники подобны и по одному частичному треугольнику подобны. Подобны ли другие частичные треугольники?

**31.71** 5 Через точку на стороне треугольника проведены хорды, параллельные другим его сторонам. а) Укажите на рисунке подобные треугольники. б) Сравните их суммарную площадь с площадью оставшейся части. в) Можете ли вы узнать, при каком положении выбранной точки площадь оставшейся части достигнет наибольшего значения? г) Пусть данный треугольник равнобедренный, а точка выбирается на его основании. Как изменяется периметр получающегося четырехугольника при движении этой точки по основанию?

**31.72** 5 Через точку внутри треугольника провели три хорды, параллельные его сторонам. Известны площади образовавшихся при этом треугольников, ограниченных стороной данного треугольника и двумя проведенными хордами. Можете ли вы найти площадь исходного треугольника?

**31.73** 6 а) В каком отношении делится медианой хорда треугольника, параллельная стороне, к которой эта медиана проведена? Каково более общее утверждение?

б) Из вершины треугольника проводятся всевозможные его хорды. Какую фигуру образуют точки, делящие эти хорды в одном и том же отношении?

## Строим

**31.74** 4 а) Постройте ромб, вписанный в данный прямоугольник.

б) Можно ли построить ромб, вписанный в данный выпуклый четырехугольник?

**31.75** 6 Нарисуйте отрезок. Пусть его длина равна 1. Нарисуйте еще один отрезок. Пусть его длина равна $d$. Постройте отрезок длиной: а) $d^2$; б) $\frac{1}{d}$; в) $\sqrt{d}$.

**31.76** 6 Нарисуйте отрезок. Разделите его в отношении золотого сечения.

**31.77** 6 Постройте прямоугольный треугольник по отношению катетов и: а) гипотенузе; б) периметру.

**31.78** 6 Постройте треугольник по двум углам и: а) высоте, опущенной из вершины третьего угла; б) медиане, проведенной из вершины третьего угла; в) биссектрисе третьего угла; г) периметру; д) радиусу описанной окружности; е) радиусу вписанной окружности.

**31.79** 6 Даны угол и точка внутри его. Постройте: а) равносторонний треугольник, вершины которого лежат на сторонах угла, а одна из сторон проходит через данную точку; б) квадрат, одна из вершин которого находится в данной точке, а остальные лежат на сторонах угла; в) окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку.

**31.80** 6 В данный сектор впишите: а) равносторонний треугольник; б) квадрат; в) окружность.

**31.81** **6** Впишите прямоугольник с заданным отношением сторон в: а) сегмент; б) сектор.

**31.82** **6** Постройте квадрат, вписанный в: а) равносторонний треугольник; б) равнобедренный треугольник, у которого основание равно высоте, проведенной к нему.

Какую часть составляет площадь такого квадрата от площади треугольника?

## Применяем геометрию

**31.83** **1** Подобны ли картина и ее фотография?

**31.84** **1** Что значит выражение «десятикратная линза»? «десятикратный бинокль»? Пусть мы смотрим на угол, равный $1°$. Каким по величине он будет виден в такую линзу? в такой бинокль?

**31.85** **1** Ребро одного куба в два раза больше ребра другого куба. Оба куба обшивают материей. Во сколько раз больше материи уйдет на больший куб?

**31.86** **4** Первая система стандартизации в книгоиздательстве исходила из двух соображений. Первое — формат бумаги и его части должны быть подобны при делении их пополам. Второе — площадь основного листа должна быть равна 1 м$^2$. Исходя из этих соображений были получены размеры основного формата в форме прямоугольника. Каковы эти размеры?

**31.87** **4** Рамка картины имеет одну и ту же ширину. Подобны ли картина и картина в рамке?

**31.88** **5** Отрезки $AD$ и $BC$ параллельны. Из $A$ в $D$ и из $B$ в $C$ вышли два пешехода. $AD$ и $BC$ они проходят за одно и то же время. Однажды один из них вышел по прямой из $A$ в $C$, а другой — по прямой из $C$ в $A$. Где они встретятся?

**31.89** **6** Расстояние между двумя пунктами на плане масштабом 1:10 000 равно 12 см. Каково оно на самом деле? Каким оно будет на плане масштабом 1:5000? 1:25 000?

**31.90** **6** На земле квадратный участок имеет площадь 1 га. Каковы размеры этого участка на карте масштабом: а) 1:25 000; б) 1:50 000?

**31.91** **6** Парк умещается в круге радиусом 2 км. Вы хотите сделать его план на прямоугольном листе бумаги. а) Какими должны быть его размеры, если вам нужно выдержать масштаб 1:10 000? б) В каком самом крупном масштабе вам удастся его сделать на прямоугольном листе размером $30 \times 20$ см?

**31.92** **6** План участка сделан в масштабе 1:10 000 на целом листе бумаги. План того же участка хотят сделать в масштабе 1:5000. Сколько для этого понадобится таких же листов бумаги?

**31.93** **6** а) Что означает фраза: «Первая карта крупнее, чем вторая»?

б) Что означает фраза: «Первая карта крупнее второй в два раза»? Приведите пример двух таких карт.

**31.94** **6** Как с помощью подобия можно: а) вычислить расстояние до недоступной точки; б) вычислить расстояние между двумя недоступными точками; в) вычислить высоту объекта; г) провести на земле прямую на невидимый объект?

**31.95** **6** На каком расстоянии от вас находится человек, идущий перпендикулярно линии наблюдения?

В одной из книг дается такой ответ: «Закройте левый глаз, вытяните руку вперед и отогните большой палец. Уловив момент, когда палец прикроет фигуру идущего вдали человека, закройте правый глаз, а левый откройте и сосчитайте, сколько шагов сделает человек до того момента, когда палец вновь прикроет фигуру. Увеличив полученное число в 10 раз, вы узнаете расстояние до него в шагах».

На чем основан такой прием?

**31.96** **6** Перед вами разворот книги (рис. 149). Подобны ли страница книги $MNDC$ и место $A_1B_1C_1D_1$, занятое ее текстом, если $AD : AB = \sqrt{2} : 1$?

### Рассуждаем

**31.97** **1** а) Нарисуйте два неравных отрезка $AB$ и $A_1B_1$. Пусть $A_1B_1 = kAB$. Укажите подобное преобразование: 1) $AB$ в $A_1B_1$; 2) $A_1B_1$ в $AB$.

б) Два подобных многоугольника вписаны в одну и ту же окружность. Будут ли они равны?

в) Два подобных многоугольника описаны около одной и той же окружности. Будут ли они равны?

**31.98** **1** Имеются две подобные пирамиды с коэффициентом подобия $k$. Чему равно отношение площадей их поверхностей?

Ответьте на тот же вопрос для других подобных многогранников. Какое у вас возникает предположение?

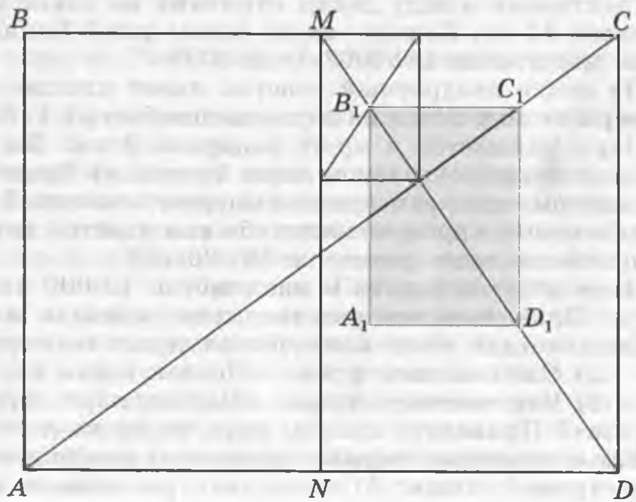



Рис. 149

**31.99** **2** Почему образом правильного многоугольника в результате гомотетии будет правильный многоугольник?

**31.100** **3** Три точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой. Пусть $A$ — центр гомотетии, при которой $B$ переходит в $C$. Как вычислить коэффициент гомотетии?

**31.101** **3** При каком условии композиция двух гомотетий является тождественным преобразованием?

**31.102** **4** Объясните, почему в результате подобия середина отрезка переходит в середину отрезка. Обобщите эту задачу.

**31.103** **4** В результате подобия треугольник перешел в другой треугольник. Объясните, почему при этом сохраняется по сторонам и углам вид треугольника. Что при этом будет образом: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) центра вписанной окружности; д) центра описанной окружности; е) центра масс?

### Участвуем в олимпиаде

**31.104** **6** Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся их точкой пересечения.

**31.105** **6** В квадрат вписан прямоугольник, не являющийся квадратом. Докажите, что его полупериметр равен диагонали квадрата.

**31.106** **6** В треугольнике $ABC$ проведена прямая $DE$, параллельная стороне $BC$. Она отсекает от треугольника $ABC$ треугольник $ADE$. Пусть $M$ — точка на стороне $BC$. Найдите площадь четырехугольника $ADME$, если площади треугольников $ABC$ и $ADE$ равны $S_1$ и $S_2$ соответственно.

**31.107** **6** На сторонах $AB$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ найдите такие точки $K$ и $M$, чтобы площадь четырехугольника, полученного при пересечении треугольников $AMB$ и $CKD$, была наибольшей.

**31.108** **6** $H$ — ортоцентр остроугольного треугольника $ABC$, $D$ — середина стороны $AC$. Прямая, проходящая через $H$ перпендикулярно отрезку $DH$, пересекает стороны $AB$ и $BC$ в точках $E$ и $F$. Докажите, что $HE=HF$.

**31.109** **6** Угол $A$ треугольника $ABC$ в два раза больше угла $B$. Докажите, что $BC^2=(AC+AB)AC$.

**31.110** **6** На окружности, касающейся сторон угла с вершиной $O$, выбраны две диаметрально противоположные точки $A$ и $B$ (отличные от точек касания). Касательная к окружности в точке $B$ пересекает стороны угла в точках $C$ и $D$, а прямую $OA$ — в точке $E$. Докажите, что $BC=DE$.

**31.111** **6** На основании $AD$ трапеции $ABCD$ взяты точки $K$ и $L$ так, что $AK=LD$. Отрезки $AC$ и $BL$ пересекаются в точке $M$, отрезки $KC$ и $BD$ — в точке $N$. Докажите, что отрезок $MN$ параллелен основаниям трапеции.

**31.112** **б** На плоскости даны отрезок $AB$ и точка $C$, являющаяся его внутренней точкой. Найдите множество точек $M$ плоскости, таких, что $\angle AMB = \angle ACM$.

**31.113** **б** Даны две окружности радиусов $R$ и $r$, касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции $ABCD$ так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны $AB$.

**31.114** **б** Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.

**31.115** **б** $O$ — произвольная точка медианы $AA_1$ треугольника $ABC$. Прямая $BO$ пересекает сторону $AC$ в точке $B_1$, а прямая $CO$ пересекает сторону $AB$ в точке $C_1$. Докажите, что прямые $B_1C_1$ и $BC$ параллельны.

**31.116** **б** Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке $A$. Через точку $B$ внутренней окружности, отличную от $A$, проведена касательная к этой окружности, пересекающая внешнюю окружность в точках $C$ и $D$. Докажите, что $AB$ — биссектриса угла $CAD$.

**31.117** **б** Учитель нарисовал на доске прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом при вершине $B$ и вписанный в него равносторонний треугольник $KMP$, такой, что точки $K$, $M$, $P$ лежат на сторонах $AB$, $BC$, $CA$ соответственно, причем отрезки $KM$ и $AC$ параллельны. Затем он стер с доски все, за исключением точек $A$, $P$, $C$, и предложил ученикам при помощи циркуля и линейки восстановить стертые линии и точки. Как это сделать?

# ⊠ § 32. Инверсия

## 32.1. Определение инверсии

Все конкретные преобразования, которые мы до сих пор рассматривали, сохраняли прямолинейность: отрезок они переводили в отрезок. Преобразование, которое мы изучим в этом параграфе, таким свойством не обладает. Оно называется инверсией и определяется так.

Пусть задана некоторая окружность $S$ с центром $O$ и радиусом $r$ (рис. 150). Каждой точке $X$, отличной от точки $O$, поставим в соответствие точку $X'$ на луче $OX$, такую, что

$$OX' \cdot OX = r^2. \qquad (1)$$

Это преобразование и называется **инверсией относительно окружности** $S$ и обозначается $I_S$.

Точка $O$ называется **центром инверсии**, радиус $r$ — **радиусом инверсии**, а окружность $S$ — **окружностью инверсии**. В точке $O$ инверсия $I_S$ не определена, т. е. для $O$ нет соответствующей точки.

Из симметричности точек $X$ и $X'$ в определении инверсии вытекают такие ее свойства:

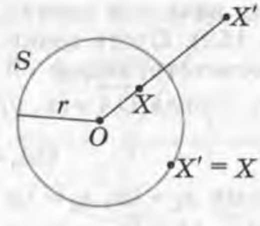



Рис. 150

**Свойство 1.**

**Если точке $X$ соответствует точка $X'$ при инверсии $I_S$, то точке $X'$ соответствует точка $X$, т. е. если $X'=I_S(X)$, то $X=I_S(X')$.**

Это же свойство можно сформулировать так: *преобразование, обратное инверсии, совпадает с самой инверсией, т. е.* $I_S^{-1}=I_S$.

Таким образом, $I_S \circ I_S = E$.

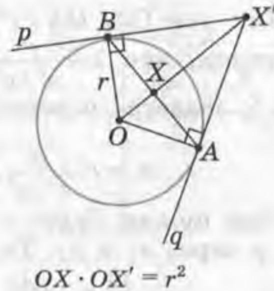



Рис. 151

**Свойство 2.**

**При инверсии каждая точка окружности инверсии неподвижна, т. е. если $X \in S$, то $I_S(X)=X$.**

В остальных случаях из пары соответствующих друг другу при инверсии точек $X$ и $X'$ одна из точек лежит внутри окружности инверсии, а другая точка — вне окружности.

Эти свойства говорят о сходстве инверсии и осевой симметрии. Поэтому иногда инверсию называют *симметрией относительно окружности*. Если преобразование $f$ — инверсия или симметрия, то выполняется равенство

$$f \circ f = E. \qquad (2)$$

Преобразование, удовлетворяющее соотношению (2), называется **инволюцией**. Симметрия и инверсия — инволюции.

Как построить соответствующие друг другу при инверсии точки $X$ и $X'$, ясно из рисунка 151. Прямые $p$ и $q$ — касательные к $S$. $OX \cdot OX' = r^2$.

## 32.2. Аналитическое задание инверсии

Для изучения дальнейших свойств инверсии удобно применить аналитический метод. Введем систему прямоугольных координат, поместив их начало в центр $O$ окружности инверсии $I_S$ (рис. 152). Пусть точка $A$ имеет координаты $x$, $y$, а соответствующая ей точка $A_1$ — координаты $x_1$, $y_1$. Тогда $\overrightarrow{OA}=(x, y)$, $\overrightarrow{OA_1}=(x_1, y_1)$ и

$$\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA}. \qquad (3)$$

Поэтому $x_1=\lambda x$, $y_1=\lambda y$. Найдем множитель $\lambda$. Так как $\overrightarrow{OA_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OA}$, то $\lambda>0$. Из равенства (3) следует, что $OA_1=\lambda OA$. Умножив обе части последнего равенства на $OA$, получим:

$$OA_1\cdot OA=\lambda OA^2. \qquad (4)$$

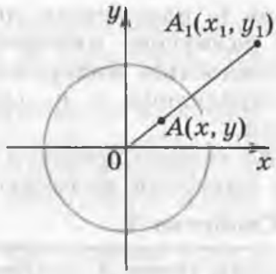



Рис. 152

Так как $OA_1\cdot OA=r^2$ и $OA^2=x^2+y^2$, то из (4) получаем, что $\lambda=\frac{r^2}{x^2+y^2}$. Следовательно, инверсия $I_S$ задается равенствами

$$x_1=r^2\frac{x}{x^2+y^2},\ y_1=r^2\frac{y}{x^2+y^2}. \qquad (5)$$

Нам нужны будут и равенства, выражающие $x$ и $y$ через $x_1$ и $y_1$. Так как $I_S^{-1}=I_S$, то

$$x=r^2\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2},\ y=r^2\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}. \qquad (6)$$

## 32.3. Образы прямых и окружностей при инверсии

**Теорема 39** *(об инверсии).*

**Инверсия преобразует: 1) прямую, проходящую через центр инверсии, в эту же прямую; 2) прямую, не проходящую через центр инверсии, в окружность, проходящую через центр инверсии; 3) окружность, проходящую через центр инверсии, в прямую, не проходящую через центр инверсии; 4) окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность, не проходящую через центр инверсии. (Во всех случаях центр инверсии исключается.)**

**Доказательство.** Общее уравнение для прямых и окружностей на плоскости таково:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad (7)$$

(если $A^2+B^2+C^2>0$).

Действительно, при $A=0$ уравнение (7) становится линейным уравнением и задает прямую (см. п. 25.4). Уравнение же окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (п. 25.2) также является уравнением вида (7).

Выясним теперь, во что преобразует инверсия $I_S$ фигуру $F$, заданную уравнением (7). Для этого в (7) подставим выражения (6). Получим:

$$\frac{Ar^4(x_1^2+y_1^2)}{(x_1^2+y_1^2)^2}+\frac{Br^2x_1+Cr^2y_1}{x_1^2+y_1^2}+D=0,$$

т. е.

$$D(x_1^2+y_1^2)+Br^2x_1+Cr^2y_1+Ar^4=0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) задает образ $I_S(F)$ фигуры $F$ при инверсии $I_S$. Рассмотрим последовательно все четыре случая.

1) $F$ — прямая, проходящая через точку $O$ (рис. 153, *а*). Тогда $A=0$, $D=0$ и уравнение (8) имеет вид $Bx_1+Cy_1=0$, т. е. задает ту же прямую $F$.

2) $F$ — прямая, не проходящая через точку $O$ (рис. 153, *б*). Тогда $A=0$, но $D\neq 0$ и уравнение (8) приводится к виду

$$x_1^2+y_1^2-2ax_1-2by_1=0,$$

где $2a=-\frac{Br^2}{D}$ и $2b=-\frac{Cr^2}{D}$. Выделив полные квадраты, его можно записать так:

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=a^2+b^2. \qquad (9)$$

Уравнение (9) задает окружность, проходящую через точку $O$.

3) $F$ — окружность, проходящая через точку $O$. Тогда $A\neq 0$, но $D=0$ и уравнение (8) приводится к виду

$$Bx_1+Cy_1+Ar^2=0. \qquad (10)$$

Так как $A\neq 0$, то это уравнение (10) задает прямую, не проходящую через точку $O$ (рис. 153, *в*). Объясните, почему в этом случае хотя бы одно из чисел $B$ или $C$ отлично от нуля.

4) $F$ — окружность, не проходящая через точку $O$ (рис. 153, *г*). В этом случае и $A\neq 0$, и $D\neq 0$, а уравнение (8) — это уравнение того же вида, что и уравнение (7): оно тоже задает окружность, не проходящую через точку $O$. Мы рассмотрели все случаи. ■

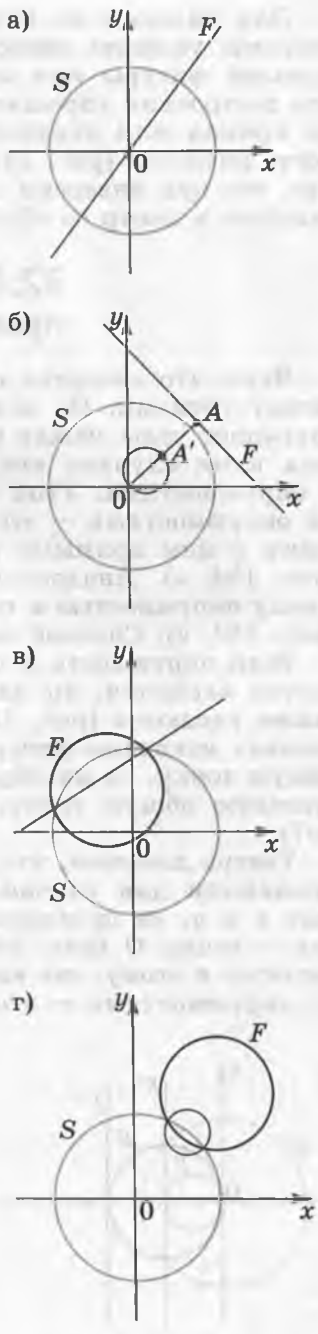



Рис. 153

Для каждого из случаев, рассмотренных в теореме, укажите построение образа соответствующей фигуры при инверсии. Заметьте, что эти построения упрощаются в тех случаях, когда прямая или окружность пересекает окружность инверсии (рис. 153, *в*, *г*). Обратите внимание, что при инверсии центр окружности *не переходит* в центр ее образа.

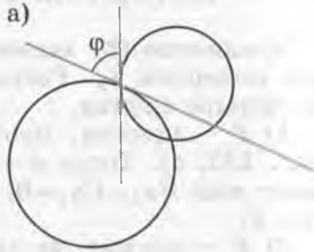
## 32.4. Сохранение величин углов при инверсии

Ясно, что инверсия не сохраняет расстояний между точками. Но оказывается, что инверсия сохраняет углы между кривыми. В рассмотренных нами случаях это углы между прямыми и окружностями. **Угол между пересекающимися окружностями** — это угол между касательными к ним прямыми в точке их пересечения (рис. 154, *а*). Аналогично определяется и **угол между окружностью и пересекающей ее прямой** (рис. 154, *б*). Сначала заметим следующее.

Если окружность и прямая (или две окружности) касаются, то их образы при инверсии также касаются (рис. 155). Действительно, поскольку исходные фигуры имеют единственную общую точку, то их образы также имеют единственную общую точку, т. е. касаются. (Почему?)

Теперь докажем, что **при инверсии углы сохраняются** для случая пересекающихся прямых $p$ и $q$, не проходящих через центр инверсии — точку $O$ (рис. 156). (Остальные случаи сводятся к этому, так как, например, угол между окружностями — это угол между их каса-

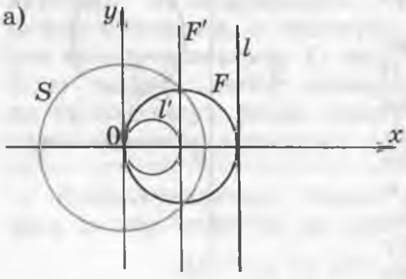
а)




б)

Рис. 154

а)




б)

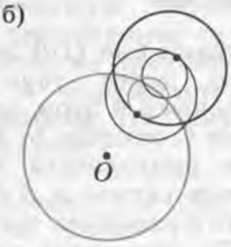



Рис. 155

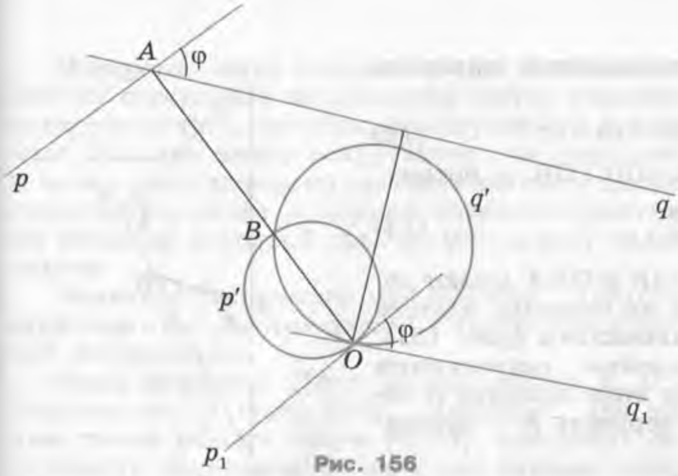


Рис. 156

тельными прямыми в точке пересечения окружностей.)

**Доказательство.** Пусть $A$ — точка пересечения $p$ и $q$. Окружности $U=I_S(p)$ и $V=I_S(q)$ пересекаются в точке $O$ и еще в одной точке $B=I_S(A)$. Поскольку углы между окружностями $U$ и $V$ в точках $O$ и $B$ равны, то будем рассматривать угол φ между ними в точке $O$. Касательные прямые $p_1$ и $q_1$ в точке $O$ к окружностям $U$ и $V$ параллельны соответственно прямым $p$ и $q$ (докажите это!). Поэтому $\angle p_1q_1=\angle pq=\varphi$. ■

## 32.5. Метод инверсии

Сначала мы применим инверсию для доказательства теоремы Птолемея о произведении диагоналей вписанного четырехугольника. Клавдий Птолемей (ок. 100 — ок. 178) — знаменитый древнегреческий астроном и математик, живший в Александрии.

При доказательстве теоремы Птолемея используется следующая лемма:

**Лемма** *(об инверсии).*

---

**Пусть $A'$ и $B'$ — образы точек $A$ и $B$ при инверсии с центром $O$ и радиусом $r$. Тогда треугольники $OAB$ и $OB'A'$ подобны и**

$$A'B'=AB\,\frac{r^2}{OA\cdot OB}. \qquad (11)$$

---

**Доказательство.** По определению инверсии выполняются равенства

$$OA' \cdot OA = r^2,\ OB' \cdot OB = r^2. \qquad (12)$$

Следовательно, $OA' \cdot OA = OB' \cdot OB$, и потому

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA}. \qquad (13)$$

Значит, треугольники $OAB$ и $OB'A'$ имеют общий угол при вершине $O$ и их стороны, идущие из этой вершины, пропорциональны (рис. 157). По третьему признаку подобия треугольники $OAB$ и $OB'A'$ подобны. (При этом вершине $A$ соответствует вершина $B'$, а вершине $B$ — вершина $A'$.) Но тогда и

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB}.$$

Из этого равенства

$$A'B' = AB \cdot \frac{OA'}{OB}. \qquad (14)$$

Подставляя в (14) выражение $OA' = \frac{r^2}{OA}$ из (12), получаем (11). ■

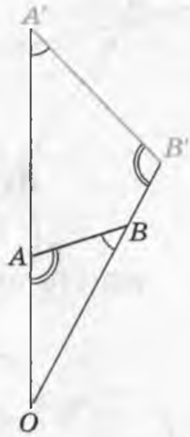


Рис. 157

**Теорема Птолемея.**

---

**Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.**

---

**Доказательство.** Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность $S$ (рис. 158). По теореме об инверсии эту окружность инверсия $I$ с центром в точке $D$ (и любым радиусом) переведет в прямую $p$, не проходящую через точку $D$. Точки $A_1 = I(A)$, $B_1 = I(B)$, $C_1 = I(C)$ лежат на прямой $p$, причем точка $B_1$ лежит на отрезке $A_1C_1$. Поэтому

$$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1. \qquad (15)$$

По лемме об инверсии

$$A_1C_1 = AC\frac{r^2}{DA \cdot DC},\ A_1B_1 = AB\frac{r^2}{DA \cdot DB},$$
$$B_1C_1 = BC\frac{r^2}{DB \cdot DC}. \qquad (16)$$

Подставив эти выражения в равенство (15) и упростив, получаем нужное равенство:

$$AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot DA. \ ■ \qquad (17)$$

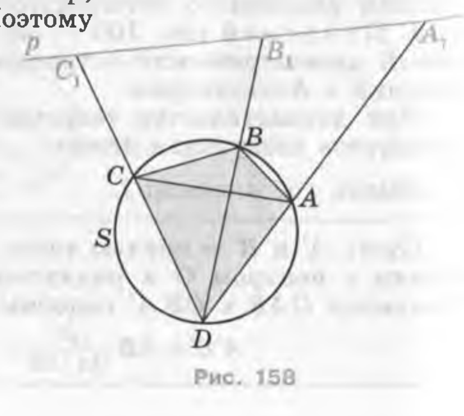


Рис. 158

Инверсию часто применяют для решения задач на построение касающихся фигур (прямых и окружностей), преобразуя окружности в прямые. Касание фигур сохраняется при инверсии, и часто после инверсии решение задачи упрощается. Затем, снова выполнив инверсию, получают решение исходной задачи. Вот пример такой задачи.

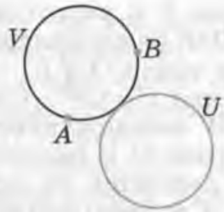



Рис. 159

**Задача.** *Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.*

**План решения.** Пусть заданы точки $A$, $B$ и окружность $U$ (рис. 159). Считается, что мы уже умеем решать такую задачу: построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой (идея решения этой задачи указана на рисунке 160). Произведем инверсию $I$ с центром в любой точке $O \in U$ и любым радиусом (например, $OA$). Инверсия $I$ переведет окружность $U$ в прямую $p = I(U)$, точку $A$ в точку $A_1 = I(A)$ и точку $B$ в точку $B_1 = I(B)$.

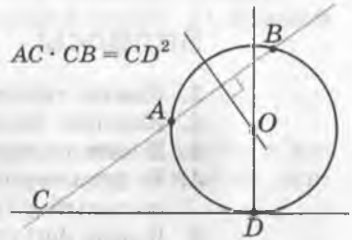



Рис. 160

Построим окружность $V_1$, проходящую через точки $A_1$, $B_1$ и касающуюся прямой $p$. Тогда окружность $V = I(V_1)$ пройдет через точки $A = I(A_1)$, $B = I(B_1)$ и коснется окружности $U = I(p)$. ■

(Все это нетрудно описать, но очень трудно нарисовать. Поэтому рисунка здесь нет.)

## 32.6. Инверсор

На свойствах инверсии основан механизм, преобразующий вращательное движение в прямолинейное. Он называется инверсором и устроен так. Семь твердых стержней $OP$, $OQ$, $PM$, $PM'$, $QM$, $QM'$ и $SM$ соединены шарнирно так, как указано на рисунке 161. Точки $O$ и $S$ неподвижны, причем $OS = SM$. Кроме того, $PMQM'$ — ромб. Когда точка $M$ вращается по окружности с центром $S$ и радиусом $SM$, точка $M'$ перемещается по прямой. Докажем это.

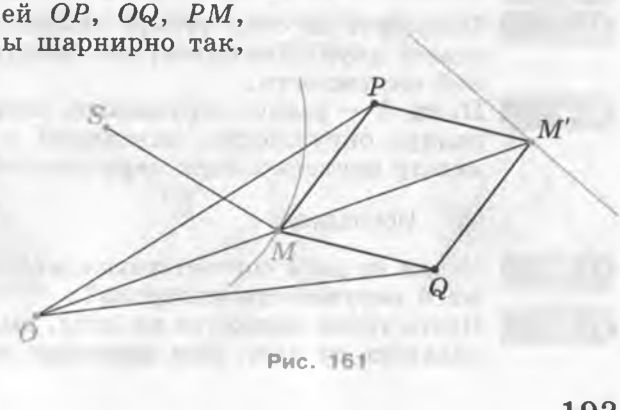



Рис. 161

Установим, что произведение $OM \cdot OM'$ постоянно. Проведем окружность $F$ с центром $P$ и радиусом $PM$. Тогда произведение $OM \cdot OM'$ равно квадрату касательной, проведенной из точки $O$ к $F$, т. е. $OM \cdot OM' = OP^2 - PM^2$. Величина $r^2 = OP^2 - PM^2$ постоянна. Итак, точки $M$ и $M'$ соответствуют друг другу при инверсии с центром $O$ и радиусом $r$. Поэтому, когда точка $M$ двигается по дуге окружности с центром в точке $S$ и проходящей через точку $O$, точка $M'$ двигается по прямолинейному отрезку (по свойству 3 из теоремы об инверсии). ■

## Вопросы

1. Какие свойства инверсии вы знаете?
2. Какими формулами задается преобразование инверсии?
3. В чем сходство между инверсией и отражением?
4. В некотором смысле можно считать, что отражение — предельный случай инверсии. Поясните это.
5. Какие фигуры в результате инверсии остаются неподвижными?
6. В чем состоит метод инверсии?

## Задачи к § 32

### Рисуем

**32.1** Нарисуйте образ круга в результате инверсии, рассматривая различные его положения относительно круга, ограниченного окружностью инверсии.

### Доказываем

**32.2** Докажите теорему, обратную теореме Птолемея.

**32.3** Положите на стол четыре любые монеты так, чтобы каждая касалась двух. Докажите, что четыре точки касания лежат на одной окружности.

**32.4** Пусть $R$ — радиус окружности, описанной около треугольника, $r$ — радиус окружности, вписанной в треугольник, $d$ — расстояние между центрами этих окружностей. Докажите, что $d^2 = R^2 - 2Rr$.

### Исследуем

**32.5** Какая из двух соответствующих точек при данной инверсии ближе к окружности инверсии?

**32.6** Пусть точка движется по лучу, выходящему из центра инверсии, удаляясь от него. Как движется соответствующая ей точка?

**32.7** Верно ли, что две данные точки и две точки, им соответствующие при данной инверсии, лежат на одной окружности?

**32.8** В какие фигуры переходят при инверсии такие части круга, ограниченного окружностью инверсии: а) хорда, не являющаяся диаметром; б) диаметр; в) дуга; г) сектор; д) сегмент?

**32.9** Пусть точка движется по часовой стрелке по окружности, не проходящей через центр инверсии. В каком направлении при этой инверсии движется соответствующая ей точка по соответствующей окружности?

**32.10** Можете ли вы найти инверсию, которая данную окружность переводит в: а) другую данную окружность; б) данную прямую?

**32.11** Сохраняет ли инверсия касание: а) окружностей; б) прямой и окружности?

### Строим

**32.12** Постройте окружность: а) проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей; б) касающуюся трех данных окружностей.

### Участвуем в олимпиаде

**32.13** Даны остроугольный треугольник $ABC$ и точка $D$ внутри его, такая, что $\angle ADB = \angle ACB + 90°$ и $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. а) Вычислите значение $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$. б) Докажите, что касательные, проведенные в точке $C$ к окружностям, описанным около треугольников $ACD$ и $BCD$, перпендикулярны.

## Задачи к главе V

### Смотрим

**V.1** Какую часть составляют неизвестные площади от площади данного равностороннего треугольника на рисунке 162?

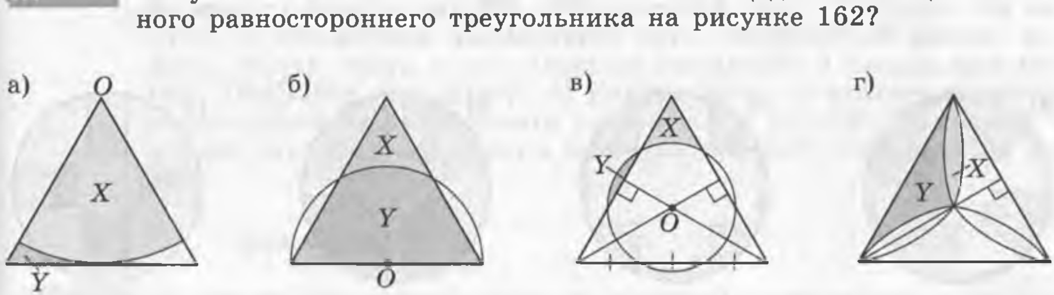



Рис. 162

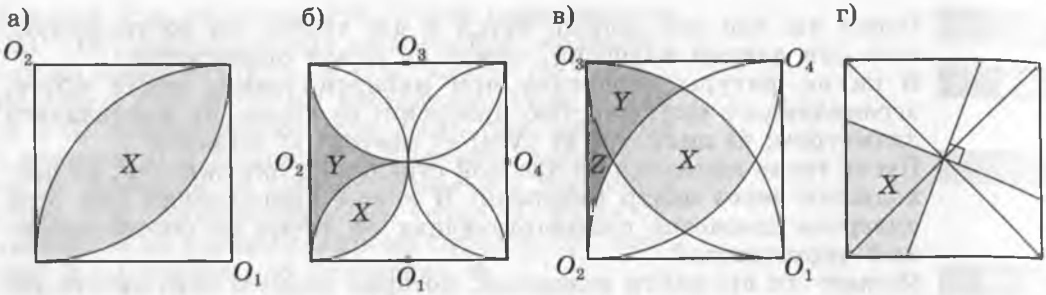



Рис. 163

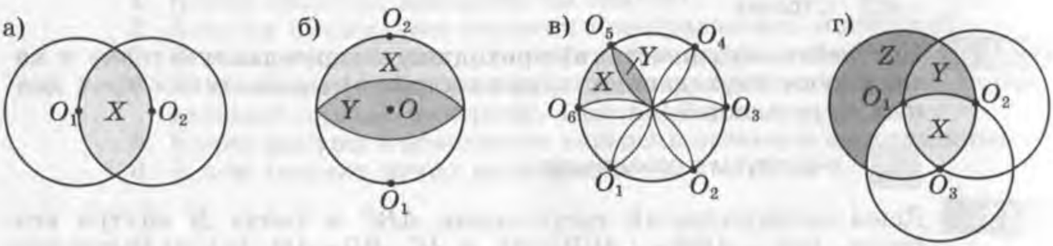



Рис. 164

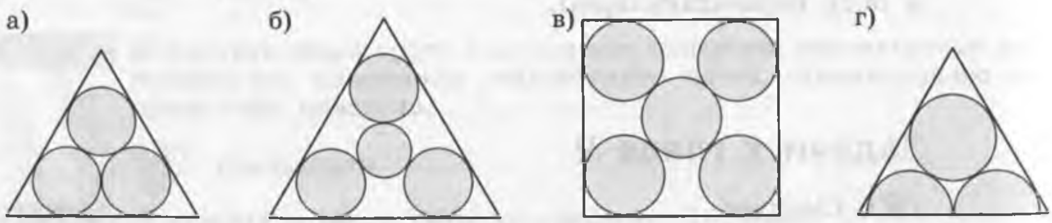



Рис. 165

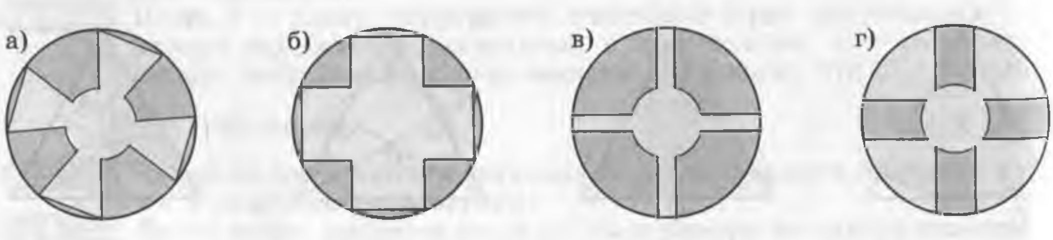



Рис. 166

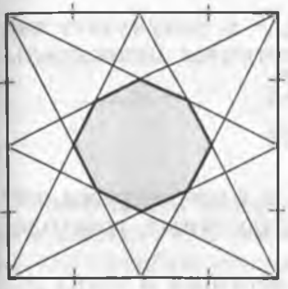


Рис. 167

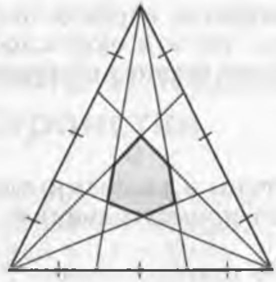


Рис. 168

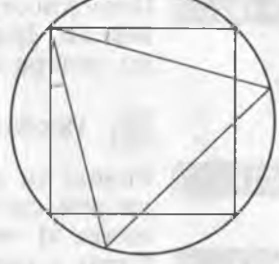


Рис. 169

**V.2** Какую часть составляют неизвестные площади от площади данного квадрата на рисунке 163?

**V.3** Какую часть составляют неизвестные площади от площади данного круга на рисунке 164?

**V.4** Какую долю составляют площади каждой из частей исходной фигуры от площади всей исходной фигуры на рисунке 165?

**V.5** Рассчитайте размеры указанных на рисунке 166 фигур так, чтобы площадь закрашенной фигуры составляла половину площади исходного круга.

**V.6** Какую часть составляет площадь закрашенного многоугольника от площади исходного квадрата на рисунке 167? Обобщите задачу.

**V.7** Какую часть составляет площадь закрашенного многоугольника от площади исходного равностороннего треугольника на рисунке 168?

**V.8** В данном круге расположены равносторонний треугольник и квадрат, как показано на рисунке 169. Какую часть от площади данного круга составляют площади всех его частей на этом рисунке?

### Находим величину

**V.9** Расположите три одинаковые монеты так, чтобы каждая касалась двух других. а) Какую часть составляет от площади одной из монет площадь фигуры, ограниченной ими? Обобщите эту задачу. б) Рассмотрим наименьший круг, содержащий данные монеты. Какую часть от его площади составляет площадь всех монет? Обобщите эту задачу. в) Какую часть составляет площадь наибольшего круга, который умещается в фигуре, описанной в пункте «а», по отношению к площади монеты? Обобщите эту задачу.

### Доказываем

**V.10** Докажите, что группа симметрии фигуры сохраняется в результате любого движения или подобия.

**V.11** Окружность $F_1$ является образом окружности $F$ в результате инверсии. Докажите, что эти окружности гомотетичны относительно центра инверсии. Верно ли обратное?

### Исследуем

**V.12** Равны ли две фигуры с равными площадями и периметрами, если эти фигуры: а) прямоугольники; б) равнобедренные треугольники; в) секторы?

**V.13** Пусть в результате преобразования $f$ точка $A$ перешла в точку $A_1$, а точка $B$ — в точку $B_1$. Пусть при любом выборе точек $A$ и $B$ выполняется равенство $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Каким является преобразование $f$?

**V.14** Каким преобразованием является композиция двух инверсий?

### Строим

**V.15** Постройте равносторонний треугольник с вершинами: а) на сторонах данного равностороннего треугольника; б) на сторонах данного квадрата; в) в данной точке и на двух данных прямых; г) на трех данных параллельных прямых; д) на трех данных концентрических окружностях.

### Применяем геометрию

**V.16** Два прямолинейных шоссе пересекаются за пределами карты. Вам нужно узнать: а) расстояние от данной точки до их пересечения; б) азимут на точку их пересечения. Как это сделать?

**V.17** Нарисуйте на бумаге четырехугольник, затем оторвите две его части с противоположными вершинами. А теперь проведите часть диагонали, соединяющей эти вершины.

**V.18** У вас имеются две прямоугольные карты одной местности. Меньшую карту наложили на бо́льшую. Докажите, что при этом изображения хотя бы одной точки на местности совпадают.

### Участвуем в олимпиаде

**V.19** Точки $A$ и $B$ движутся равномерно и с равными угловыми скоростями по окружностям с центрами $O_1$ и $O_2$ соответственно (по часовой стрелке). Докажите, что вершина $C$ правильного треугольника $ABC$ также движется равномерно по некоторой окружности.

**V.20** Точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ разбивают окружность радиуса 1 на 5 равных дуг. Найдите длину вектора $\overrightarrow{A_1A_5} + \overrightarrow{A_2A_5} + \overrightarrow{A_3A_5} + \overrightarrow{A_4A_5}$.

**V.21** На сторонах треугольника $ABC$ вне его построены правильные треугольники $ABC_1$, $BCA_1$, $CAB_1$. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overline{0}$.

*Дополнение к главе V*

# Движения и подобия в пространстве

Расскажем обзорно о важнейших фактах теории движений и подобий в пространстве. Подробно эти преобразования изучаются в 11 классе.

## 1. Определение и общие свойства движений в пространстве

Данное в п. 26.2 определение движения относится как к фигурам на плоскости, так и к фигурам в пространстве. И все свойства движений, доказанные в п. 26.3, а также их доказательства остаются справедливыми и для движений в пространстве. *Свойство 5 о том, что движение сохраняет величины углов, надо понимать более широко: сохраняются углы между прямыми и плоскостями, между плоскостями, между векторами.* В частности, *при движении сохраняются все отношения перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей.*

Отметим, что *при движении в пространстве плоскость переходит в плоскость, тетраэдр — в тетраэдр.* Любой многогранник составлен из тетраэдров. Поэтому при движении многогранник переходит в многогранник. *Объемы многогранников при движении сохраняются.*

## 2. Виды движений пространства

Все сказанное в п. 27.1 о переносе остается справедливым и для переносов в пространстве, в частности характерный признак переноса: *движение, сохраняющее направления, является переносом.*

Пространственным аналогом отражения в прямой (осевой симметрии) является **отражение в плоскости (зеркальная симметрия)**. Определяется оно так:

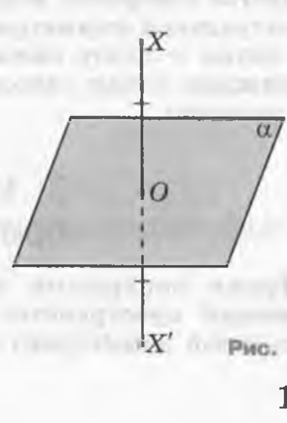


Рис. 170

**Симметрией относительно плоскости α (отражением в плоскости α, зеркальной симметрией относительно плоскости α)** называется преобразование фигуры, которое каждой ее точке $X$ сопоставляет точку $X'$, симметричную ей относительно плоскости $\alpha$. Если точка $X$ лежит в плоскости $\alpha$, то $X'=X$; если же точка $X$ не лежит в плоскости $\alpha$, то отрезок $XX'$ перпендикулярен плоскости $\alpha$ и пересекает ее в своей середине (рис. 170).

Характерное свойство зеркальной симметрии аналогично характерному свойству осевой симметрии на плоскости: *движение пространства является зеркальной симметрией тогда и только тогда, когда его множество неподвижных точек является плоскостью.*

Если некоторое движение пространства имеет неподвижные точки, то это множество либо состоит из одной точки (например, центральная симметрия), либо является прямой, либо плоскостью (зеркальная симметрия), либо состоит из всех точек пространства (тождественное преобразование). Движение пространства, множеством неподвижных точек которого является прямая $a$, называется **поворотом вокруг прямой (вокруг оси) $a$**.

При повороте вокруг прямой $a$ в плоскостях, перпендикулярных прямой $a$, происходит поворот на один и тот же угол $\varphi$ в одном и том же направлении вокруг точек, в которых эти плоскости пересекают прямую $a$ (рис. 171). Этот угол $\varphi$ называют углом поворота.

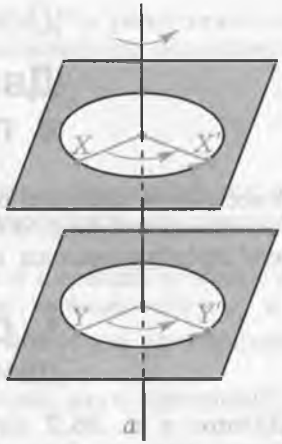


Рис. 171

Поворотом вокруг прямой $a$ на 180° является **осевая симметрия в пространстве относительно прямой $a$** (рис. 172). Это утверждение аналогично утверждению о том, что на плоскости поворот на 180° есть центральная симметрия.

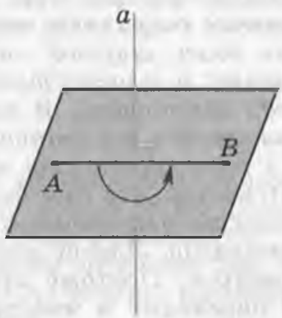


Рис. 172

Отметим, что центральная симметрия в пространстве поворотом вокруг прямой не является: у центральной симметрии лишь одна неподвижная точка — центр симметрии, а у поворота неподвижные точки заполняют целую прямую — ось поворота.

## 3. Классификация движений пространства

Тремя попарными композициями из трех движений пространства (переноса, поворота и зеркальной симметрии) исчерпываются все дви-

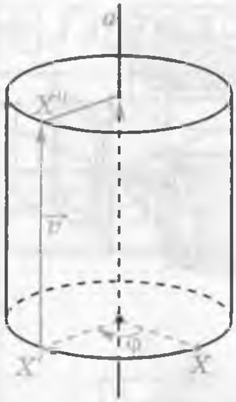



Рис. 173

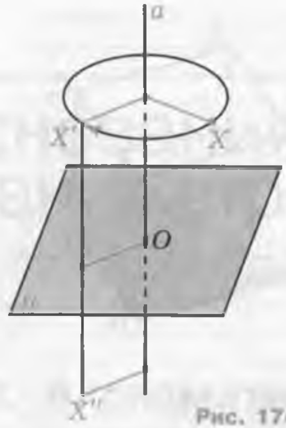



Рис. 174

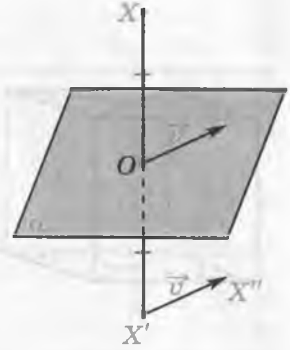



Рис. 175

жения пространства. А именно имеет место следующий аналог теоремы Шаля:

**Любое движение пространства является одним из трех следующих движений:**

**1) композицией поворота и переноса в направлении оси поворота (такое движение называется винтовым (короче, винтом), рис. 173);**

**2) композицией поворота и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота (такое движение называется зеркальным поворотом, рис. 174);**

**3) композицией симметрии относительно плоскости и переноса в некотором направлении, параллельном этой плоскости (такое движение называется скользящей симметрией, рис. 175).**

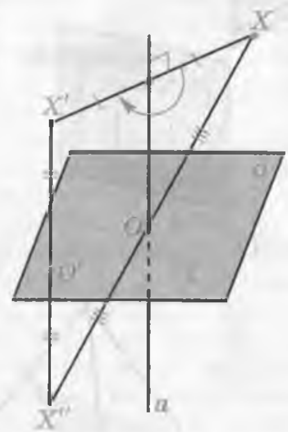



Рис. 176

Отметим, что частными случаями винтового движения является и перенос (при нулевом угле поворота), и поворот (при нулевом векторе переноса).

Частными случаями зеркального поворота являются зеркальная симметрия (при нулевом угле поворота) и центральная симметрия (при повороте на 180°, рис. 176). Зеркальная симметрия также частный случай скользящей симметрии (при нулевом векторе переноса).

## 4. Симметрия пространственных фигур

Здесь мы ограничимся рисунками, иллюстрирующими симметрию куба, правильного тетраэдра и правильного октаэдра (рис. 177—179).

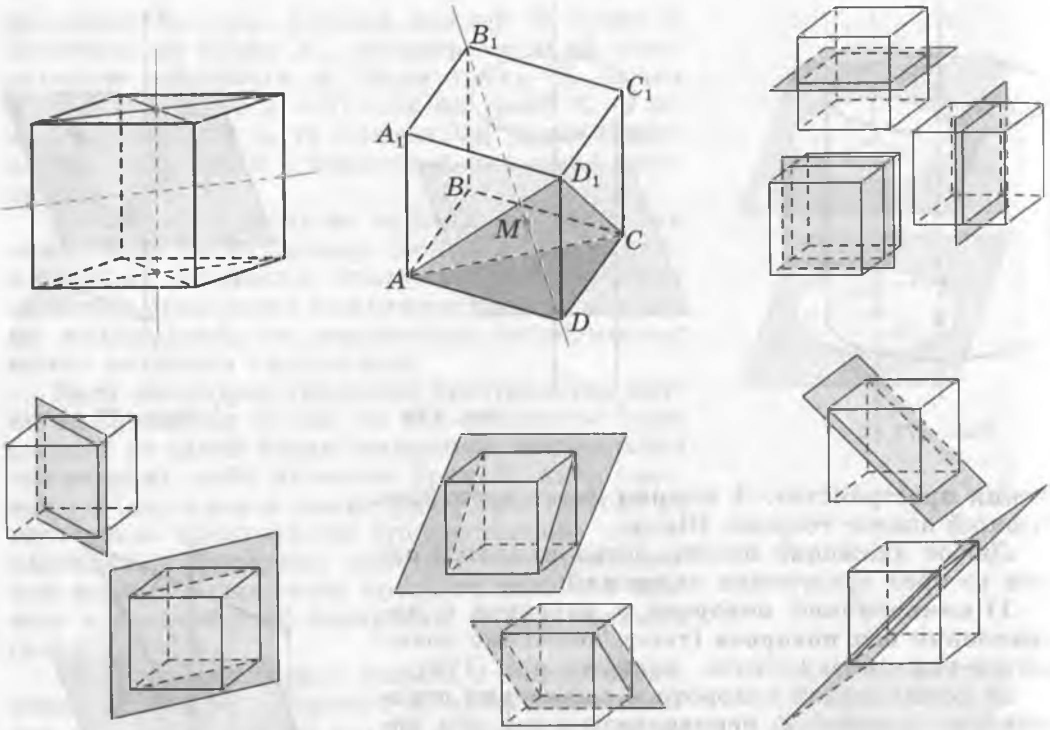



Рис. 177

а) б) в)

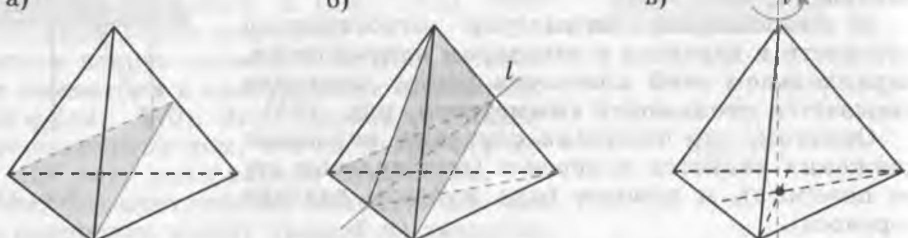



Рис. 178

а) б) в)

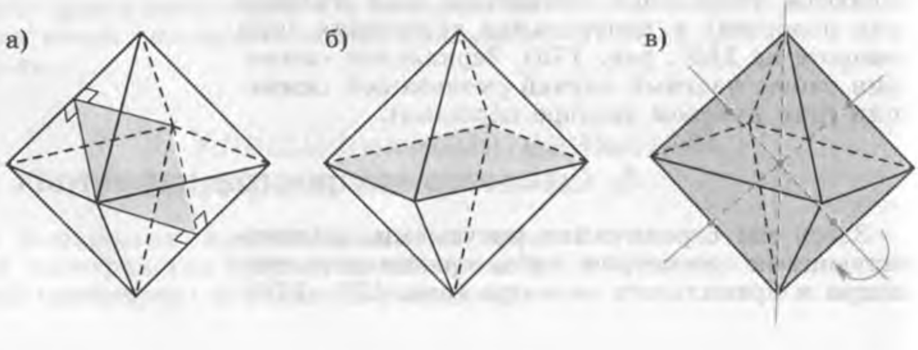


Рис. 179

Глава VI

# Основания планиметрии

## § 33. Аксиоматический метод и основания планиметрии Евклида

### 33.1. Аксиоматический метод

В начале курса геометрии говорилось, что в геометрии только самые начальные сведения берутся из практики и наблюдения, они наглядны и очевидны. Все ее дальнейшие утверждения обосновываются путем логических рассуждений. Это понял еще Фалес.

Так мы и поступали, когда доказывали теоремы, решали задачи. Однако в наших доказательствах мы не только пользовались чисто логическими рассуждениями, но и нередко опирались на очевидность. Например, мы назвали многоугольником часть плоскости, ограниченную простой замкнутой ломаной (п. 1.2). Но что значит «ограниченную»? Точного определения этого понятия дано не было — мы полагались на очевидность. Но как дать определение?

Обычное определение состоит в том, что одно понятие разъясняется с помощью других, которые считаются известными. Допустим, эти известные понятия тоже можно определить через другие. Но так продолжать без конца невозможно. Мы придем к понятиям, которые через другие определить уже нельзя; их можно только пояснить, показать на примерах. Сами же эти понятия будут служить для определения других понятий. Они в этом смысле будут исходными, **основными**.

Итак, нужно выявить **основные понятия** изучаемой нами геометрии, а остальные определить через них.

Однако этого еще недостаточно. Доказывая какое-нибудь утверждение, теорему, мы опираемся на некоторые предпосылки, на то, что считается уже известным. Но и эти предпосылки нужно обосновывать и т. д. Так продолжать до бесконечности невозможно, и мы придем к предпосылкам, которые должны быть приняты за исходные. Эти исходные положения — **аксиомы** принимаются без доказательства и составляют основу для доказательства теорем. При этом список аксиом должен быть таков, чтобы, опираясь на них, можно было получить необходимые выводы.

Так, мы предполагали, что данным отрезком $e$, принятым за масштаб, можно измерить любой другой отрезок (с заранее указанной точностью), откладывая на нем отрезки, равные $e$, или их доли: $\frac{e}{2}$, $\frac{e}{4}$, $\frac{e}{8}$, ... . Однако можно допустить, что существует столь большой отрезок, что, сколько раз ни откладывать на нем отрезки, равные $e$, все будет оставаться остаток, больший $e$. Ясно, что такого быть не может. Но для логических выводов надо либо доказать, либо принять за аксиому, что такое невозможно. Еще в древности греки поняли это и высказали такую аксиому (она называется *аксиомой Архимеда*): для любых двух отрезков $a$ и $b$ найдется такое натуральное число $n$, что $na > b$.

Мы часто пользовались тем, что прямая, проходящая через точку внутри круга, пересекает его окружность в двух точках. Это очевидно (рис. 180). Однако почему нельзя было бы предположить, что как раз там, где окружность должна пересечь прямую, на прямой нет никакой точки — там как бы «дыра» и окружность переходит с одной стороны от прямой на другую, не пересекая прямой? Это невозможно, говорим мы, потому что прямая сплошная, непрерывная, в ней нет «дыр». Но это наше представление нужно явно и точно выразить, значит, нужна особая аксиома. Такая аксиома есть, и она называется *аксиомой непрерывности*.

Итак, задача состоит в том, чтобы выделить основные понятия, сформулировать как аксио-

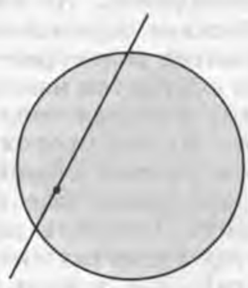


Рис. 180

мы все положения, которые принимаются без доказательств, и тем дать основу для строго логического построения планиметрии — для определения других ее понятий и доказательства теорем. В этом смысле и говорят, что список основных понятий и формулировки аксиом составляют **основания планиметрии.**

После того как выделены основные понятия и сформулированы аксиомы теории (в нашем случае планиметрии), все ее дальнейшие утверждения выводятся чисто логическим путем. Такой способ построения научной теории называют **аксиоматическим методом.** Впервые он появился в геометрии в Древней Греции, а в настоящее время применяется во всех теоретических науках, прежде всего в математике.

**Замечание.** Принимать за основные можно разные понятия, так же как принимать за аксиомы можно разные утверждения планиметрии. Получаются разные ее основания. Но все они дают одни и те же результаты. Примеры таких различных построений планиметрии вы получите, если сравните, например, разные школьные учебники геометрии.

## 33.2. Основные понятия и определения

Основные понятия, которые выделяют при строгом построении геометрии, делятся на два вида: одни обозначают **объекты,** которыми занимается геометрия, другие обозначают **отношения** между ними. Так, точка и отрезок — это объекты, а то, что точка принадлежит отрезку,— отношение между ними.

За основные объекты мы принимаем следующие: 1) **точки;** 2) **отрезки;** 3) **фигуры.** При этом точки и отрезки считаются частными видами фигур.

За основные отношения между этими объектами принимаются: 1) **точка принадлежит фигуре,** в частности отрезку; 2) **точка является концом** отрезка; 3) **два отрезка равны.**

Отношение равенства отрезков служит основным понятием, оно не определяется. Наглядно оно поясняется наложением одного отрезка на другой, но это не определение. Если бы мы сказали, что отрезки называются равными, если один можно наложить на другой, то надо было бы определить, что значит наложить, либо принять наложение за основное понятие.

Дадим теперь несколько определений, выражая их через основные понятия. Вернитесь также к ранее данным определениям других понятий и проанализируйте их (например, понятие пересечения фигур и т. п.).

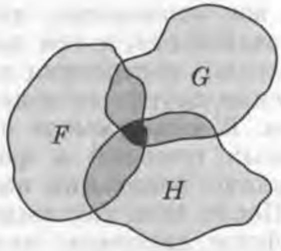



Рис. 181

1. Фигура называется **объединением** некоторых данных фигур, если ей принадлежат все точки этих фигур, и никакие другие (рис. 181).

2. **Прямой** $AB$ называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков, содержащих точки $A$ и $B$ (рис. 182, *а*).

3. **Лучом** $AB$ называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков с концом $A$, содержащих точку $B$ (рис. 182, *б*).

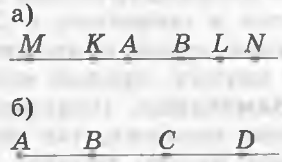



Рис. 182

4. **Полуплоскостью**, ограниченной прямой $a$, называется фигура, обладающая следующими свойствами: 1) она содержит прямую $a$, но не совпадает с ней; 2) если точки $A$, $B$ принадлежат полуплоскости, но не прямой $a$, то отрезок $AB$ не имеет общих точек с $a$ (рис. 183, *а*); 3) если же точка $A$ принадлежит полуплоскости, а точка $B$ нет, то отрезок $AB$ имеет с прямой $a$ общую точку (рис. 183, *б*).

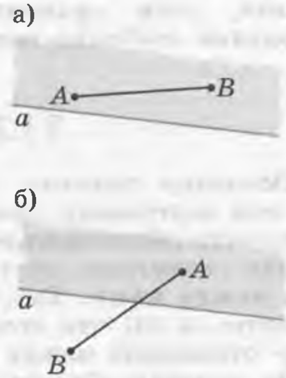



Рис. 183

(**Фигура** $F$ **содержит фигуру** $G$, если каждая точка фигуры $G$ является точкой фигуры $F$; обозначение $F \supset G$ или $G \subset F$.)

Определения имеют смысл не сами по себе, а лишь в связи с утверждениями, устанавливающими, что объект, которому дано определение, существует. И это должно либо утверждаться в аксиомах, либо быть доказано из аксиом. Поэтому прежде всего аксиомы должны говорить о существовании самих основных объектов и отношений между ними.

## 33.3. Аксиоматика евклидовой планиметрии

**Аксиоматикой** называют перечень основных понятий и аксиом. Обычно говорят не перечень, а **система аксиом**, так как аксиомы связаны друг с другом и образуют в этом смысле известную систему.

Аксиомы планиметрии делятся на несколько групп. Сформулируем их. Римской цифрой обозначается номер группы аксиом, а арабской — номер аксиомы в этой группе (если их больше одной).

**I. Аксиомы связи отрезков и точек.**

I.1. *Существуют по крайней мере две точки.*

I.2. *Для каждых двух точек существует, и притом единственный, отрезок, концами которого являются данные точки.*

I.3. *У каждого отрезка есть два и только два конца, а также существуют другие принадлежащие ему точки.*

О точках отрезка, отличных от его концов, говорят, что они лежат **внутри** этого отрезка или что они лежат **между** его концами.

I.4. *Точка $C$, лежащая внутри отрезка $AB$, разбивает его на два отрезка $AC$ и $CB$, т. е. $AB$ есть объединение отрезков $AC$ и $CB$, которые имеют лишь одну общую точку $C$.*

В этом случае говорят, что отрезок $AB$ **составлен** из отрезков $AC$ и $CB$.

I.5. *Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов, т. е. для каждого отрезка $AB$ существует содержащий его отрезок $AC$ с концом $C$, отличным от $B$.*

I.6. *Объединение двух отрезков, имеющих две общие точки, является отрезком; его концами служат два из концов этих отрезков.*

**II. Аксиомы равенства отрезков.**

II.1. *Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны.*

II.2. *На каждом луче $l$ от его начала $O$ можно отложить отрезок, равный данному отрезку $AB$, и притом только один, т. е. существует единственная точка $C \in l$, такая, что $OC = AB$.*

II.3. *Если точка $C$ лежит внутри отрезка $AB$, а точка $C_1$ лежит внутри отрезка $A_1B_1$ и*

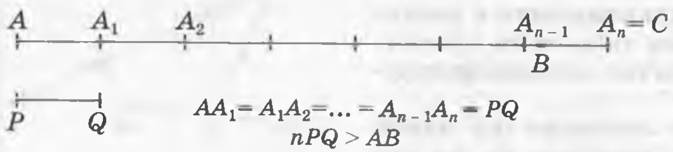



Рис. 184

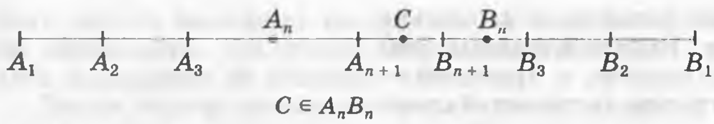



Рис. 185

*выполняются равенства* $AC = A_1C_1$ *и* $CB = C_1B_1$, *то* $AB = A_1B_1$.

II.4. *Для каждых двух отрезков $AB$ и $PQ$ существует отрезок $AC$, содержащий $AB$ и составленный из конечного числа отрезков, равных $PQ$* (аксиома Архимеда, рис. 184).

**III. Аксиома непрерывности.**

*Если дана бесконечная последовательность отрезков $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, ... и отрезок $A_1B_1$ содержит отрезок $A_2B_2$, отрезок $A_2B_2$ содержит отрезок $A_3B_3$ и вообще отрезок $A_nB_n$ содержит отрезок $A_{n+1}B_{n+1}$, то существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам* (рис. 185).

Аксиомы первых трех групп можно назвать линейными, так как в них не присутствует представление о плоскости: они могли бы относиться к точкам и отрезкам, лежащим на одной прямой. Все эти аксиомы, за исключением аксиомы непрерывности, выведены непосредственно из практики, а в практике выраженные в них свойства подразумеваются сами собой.

Линейные аксиомы позволяют обосновать измерение длины отрезков и доказать следующую важную теорему:

**Теорема о длине отрезка.**

---

**При произвольно выбранном отрезке *e* каждому отрезку *a* однозначно сопоставляется положительное число (которое называется длиной отрезка в масштабе *e*) так, что выполняются три условия: 1) длины равных отрезков равны; 2) при сложении отрезков длины их складываются; 3) $l(e) = 1$.**

---

Эта непростая теорема доказывается в институтах, а в школьных курсах геометрии существование длины отрезка обычно аксиоматизируется.

Аксиом о фигурах, не лежащих на одной прямой, всего четыре. Мы разобьем их на две группы.

IV. **Аксиомы плоскости.**

IV.1 *(аксиома разбиения плоскости). Каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, т. е. в объединении эти полуплоскости дают всю плоскость, а их пересечением является данная прямая* (рис. 186).

Рис. 186

В двух следующих аксиомах речь идет об углах, меньших развернутого. Такой **угол** определим как пару лучей, имеющих общее начало и не лежащих на одной прямой. Определение равенства углов соответствует общему определению равенства фигур, данному в п. 26.4. Точки $X$ и $X'$ лучей $h$ и $h'$ с началами в точках $A$ и $A'$ считаем соответственными, если $A'X'=AX$. Углы $A$ и $A'$ со сторонами $h$, $k$ и $h'$, $k'$ назовем **равными**, если любые отрезки, соединяющие соответственные точки сторон этих углов, равны, т. е. из равенств $A'X'=AX$, $X\in h$, $X'\in h'$ и $A'Y'=AY$, $Y\in k$, $Y'\in k'$ следует равенство $X'Y'=XY$.

IV.2 *(аксиома откладывания угла). От каждого данного луча в данную сторону можно отложить угол, равный данному углу, и притом только один* (рис. 187). («В данную сторону» значит в заданную полуплоскость, на границе которой лежит данный луч.)


Рис. 187

IV.3 *(аксиома равенства углов). Если на сторонах углов $A$ и $A'$ найдутся такие соответственные точки $B$, $C$ и $B'$, $C'$, что $B'C'=BC$, то углы $A$ и $A'$ равны* (т. е. если $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, то для любых точек $P$, $Q$, $P'$, $Q'$, таких, что $AP=A'P'$ и $AQ=A'Q'$, выполняется равенство $PQ=P'Q'$; рис. 188).

V. **Аксиома параллельности Евклида.**

*Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая данную прямую* (рис. 189).

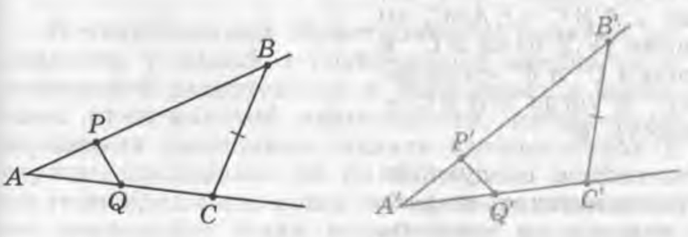


Рис. 188

Рис. 189

## 33.4. Об уровне строгости школьного курса геометрии

После того как система аксиом планиметрии предъявлена, следовало бы убедиться, что она действительно дает основу для логического построения планиметрии. Для этого прежде всего надо доказать, опираясь на аксиомы, те теоремы, которые перечислены во введении. Ведь именно исходя из таких теорем, мы развивали планиметрию в этом учебнике. Самыми важными из этих теорем являются признаки равенства треугольников. Аксиомы IV.2 и IV.3 мы выбрали так, что доказательства признаков равенства треугольников станут совсем простыми. При этом равенство треугольников можно определить по-разному: например, назвать равными можно такие треугольники, у которых соответственно равны как стороны, так и углы. Тогда в первом признаке равенства треугольников $ABC$ и $A'B'C'$ из равенств $A'B'=AB$, $A'C'=AC$ и $\angle A'=\angle A$ все три равенства $B'C'=BC$, $\angle B'=\angle B$ и $\angle C'=\angle C$ следуют прямо из аксиомы IV.3, а также из определения равенства углов. Также из аксиомы IV.3 следует равенство углов в третьем признаке равенства треугольников. Немногим сложнее доказательство второго признака равенства треугольников. Проведем его.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$, $A'B'=AB$, $\angle A'=\angle A$, $\angle B'=\angle B$.

Доказать: $\triangle A'B'C'=\triangle ABC$, т. е. $B'C'=BC$, $A'C'=AC$, $\angle C'=\angle C$.

**Доказательство.** Отложим на луче $A'C'$ отрезок $A'C''=AC$ (аксиома II.2). Проведем отрезок $B'C''$ (аксиома I.2). Тогда $\triangle A'B'C''=\triangle ABC$ (по первому признаку равенства). Следовательно, $\angle A'B'C''=\angle ABC$. А так как $\angle A'B'C'=\angle ABC$, то $\angle A'B'C''=\angle A'B'C'$. По аксиоме IV.2 лучи $B'C''$ и $B'C'$ совпадают. Поэтому точки $C'$ и $C''$ совпадают. Следовательно, $A'C'=AC$. А тогда $\triangle A'B'C'=\triangle ABC$ (по первому признаку). ■

Повторяя доказательства теорем, следующих за признаками равенства треугольников, старайтесь делать необходимые ссылки на аксиомы или на уже доказанные теоремы.

Но не везде в школьном курсе удается выдержать такой уровень логической строгости, особенно в тех случаях, где требуется применение аксиомы непрерывности. Правда, таких мест в курсе геометрии немного.

Без подробного обоснования остался вопрос о существовании и единственности площади многоугольных фигур и теорема о площади прямоугольника (доказательства этих теорем еще сложнее доказательства уже упоминавшейся в п. 33.3 теоремы о длине отрезка). А вот еще наглядно очевидная теорема: *простая замкнутая ломаная L разбивает плоскость на две части — ограниченный многоугольник F и неограниченную фигуру G, дополняющую F до всей плоскости* (рис. 190, *а*). Но ее доказательство столь трудно, что его не приводят даже в весьма подробных курсах геометрии. Этот пример показывает, сколь сложен бывает переход от геометрической наглядности к чисто логической строгости. (Отметим, что для выпуклой ломаной $L$ доказательство этой теоремы существенно упрощается: выпуклый многоугольник $F$ получается пересечением конечного числа полуплоскостей (рис. 190, *б*).)

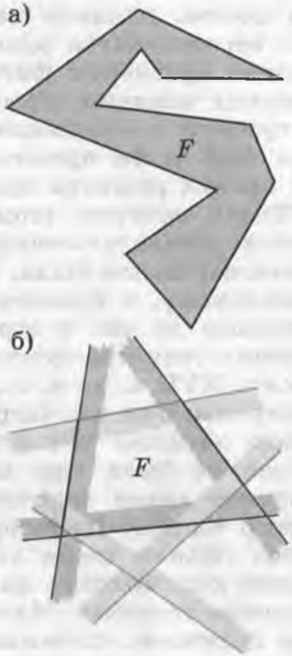


Рис. 190

# § 34. История развития геометрии

Геометрия развивалась многие тысячелетия. Здесь мы расскажем об основных периодах ее истории.

## 34.1. Эпоха практической геометрии

Первоначальные геометрические понятия зародились у людей в глубочайшей древности и постепенно расширялись и уточнялись с развитием практической деятельности, когда люди оценивали расстояния, делали прямые копья и стрелы, сравнивали их по длине и т. д. Но сама геометрия зародилась тогда, когда с развитием земледелия были выработаны и осознаны первые правила измерения земельных участков для посева, правила нахождения объема сосудов, строительства зданий и др. Эти простые правила сравнения фигур, нахождения геометрических величин, простейших геометрических построений и составили начала геометрии как пока еще чисто прикладной науки, как собрание правил решения практических задач.

Такие зачатки геометрии складывались в древних земледельческих обществах (в Египте, Вавилоне, дельте Инда, Китае). И раньше всего, по-видимому, в Древнем Египте. Самое древнее дошедшее до нас в отрывках собрание правил решения геометрических задач из Египта относится к XVII в. до н. э., и оно, конечно, не было первым. Так что возраст геометрии надо оценивать не менее чем в 4—5 тысяч лет. Но тогда она не была еще математической наукой. Египтяне знали многие факты геометрии, например теорему Пифагора, приближенное выражение объема шара через его радиус и др., именно как опытные факты, а не логически доказанные теоремы. Математика, как мы ее теперь понимаем, сложилась много позже.

## 34.2. Формирование теоретической геометрии

Практические правила, подсказанные опытом, постепенно приводились в систему, и одни правила стали выводиться из других. Возникло доказательство, правила стали превращаться в теоремы, в предложения, которые доказываются рассуждением без ссылок на опыт; появились также задачи, имеющие лишь теоретический интерес; оформились представления об идеальных геометрических фигурах — о точках без всяких измерений, о прямой без ширины и толщины и т. п. Геометрия постепенно, таким образом, становилась теоретической наукой, как мы ее теперь понимаем. Одновременно стала складываться теоретическая арифметика — начала теории чисел, так что в целом возникла чистая математика. Как происходил этот процесс, точно неизвестно, но, во всяком случае, известно, что геометрия оформилась как наука в Древней Греции в VII—V вв. до н. э. В этом сыграли существенную роль греческие мыслители, известные вам по названиям теорем,— Фалес (ок. 625 — ок. 547 г. до н. э.) и Пифагор (VII в. до н. э.).

В конце V в. до н. э. греческий геометр Гиппократ Хиосский (т. е. из Хиосса) создал сводное сочинение по геометрии — «Начала», до нас, однако, не дошедшее. Он, как и другие греческие геометры того времени, занимался тонкими теоретическими вопросами геометрии.

Таким образом, в то время геометрия, несомненно, уже сложилась как наука с ее системой выводов и с чисто теоретическими задачами.

Этот процесс формирования геометрии от правил измерения земельных участков до логической системы теорем кратко охарактеризован в следующих замечательных словах греческого ученого Евдема Родосского (IV в. до н. э.):

«Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении земли. Это измерение было им необходимо вследствие разливов реки Нила, постоянно смывающей границы. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное. Зарождаясь путем чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом рассмотрения и, наконец, делается достоянием разума».

## 34.3. Расцвет геометрии в Греции

Одним из важнейших событий того времени — в V в. до н. э.— было открытие несоизмеримых отрезков. Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной: у них нет общей меры, т. е. такого отрезка, как бы мал он ни был, который укладывался бы и в диагонали, и в стороне по целому числу раз. Говоря нашим современным языком, если сторона квадрата равна $a$, то диагональ по теореме Пифагора равна $\sqrt{2}a$. А так как $\sqrt{2}$ — число иррациональное, то нет таких целых чисел $m$ и $n$, чтобы $a=mb$ и $\sqrt{2}a=nb$.

Раньше думали, что отношение любых величин можно выразить рациональным числом, т. е. как отношение целых чисел, и вот выяснилось, что это неверно. Выяснилось тем самым, что рациональных чисел недостаточно для выражения отношения любых величин. Но обобщения понятия числа иррациональных чисел греки, однако, не смогли сделать. Поэтому то, что мы теперь выражаем средствами алгебры, они выражали геометрически: сначала была геометрия — алгебра появилась потом. Например, квадратное уравнение $x^2+ax=b$ выражалось примерно так: найти такой отрезок $x$, что квадрат, на нем построенный, вместе с прямоугольником, построенным на этом отрезке и данном отрезке, дают площадь, равную данной.

Вместо действительных чисел вообще рассматривались отношения величин. Теорию этих отношений построил в IV в. до н. э. Евдокс, один из величайших древнегреческих ученых. И в настоящее время его теория является образцом строгого логического построения. Евдокс создал также первую модель движения небесных тел (с Землей в центре), можно сказать, первую математическую теорию естествознания; и она послужила прообразом более поздней системы Птолемея.

Основные достижения геометрии были систематизированы и изложены в логической последовательности Евклидом в его обширном труде, известном под названием «Начала». Евклид жил в Александрии в III в. до н. э., уже в другую эпоху греческой истории, последовавшую за походами Александра Македонского,— эпоху эллинизма. Рассказывают, что, когда правивший в Александрии царь сказал Евклиду, чтобы тот специально для него изложил геометрию, Евклид ответил: «В геометрии нет царского пути». Истина, наука для всех одна.

«Начала» Евклида содержат только основы геометрии того времени, но, например, известные тогда результаты о конических сечениях в них не излагаются. Кроме того, «Начала» содержат элементы теории чисел и геометрически изложенной алгебры, так что в целом они представляют изложение основ математики того времени. Открываются «Начала» определениями основных понятий и формулировками основных положений геометрии — «постулатов» и «аксиом», затем идут в широкой последовательности «предложения» — теоремы и решения задач на построение; каждый новый раздел «Начал» начинается с нужных определений. Причины разделения основных положений на «постулаты» и «аксиомы» в настоящее время не совсем понятны, и им не придают значения: теперь основные положения всякой теории называются вообще аксиомами.

Эта структура «Начал» послужила образцом научного изложения на две тысячи лет, и ему, например, следовал Ньютон в своих «Математических началах натуральной философии». Учебники же школьной геометрии до самого последнего времени повсеместно представляли собой, по существу, популярные изложения «Начал» Евклида.

Со времени Евклида все учили геометрию по его «Началам», а предшествовавшие им сочинения (например, упомянутые выше «Начала» Гиппократа Хиосского) были забыты.

После Евклида греческие ученые развивали способы нахождения площадей и объемов (Архимед — ок. 287— ок. 212 г. до н. э.), глубоко изучали конические сечения (Аполлоний — ок. 260 — ок. 170 г. до н. э.), положили начало тригонометрии (Гиппарх — ок. 180 — ок. 125 г. до н. э.), тригонометрии на сфере (Менелай — I—II вв.) и др.

## 34.4. Классические задачи древности

Большое значение для дальнейшего развития математики имели не только результаты, полученные геометрами Древней Греции, но и поставленные ими проблемы. Конечно, самой знаменитой из них является проблема V постулата о независимости аксиомы параллельности Евклида от остальных аксиом евклидовой геометрии. Об этой проблеме мы еще подробно будем рассказывать. Здесь же речь идет о трех знаменитых задачах на построение.

Первая из этих задач — задача об удвоении куба, т. е. о построении циркулем и линейкой отрезка, который был бы ребром куба, имеющего объем, вдвое больший объема данного куба.

Вторая задача — задача о трисекции угла, т. е. о разбиении циркулем и линейкой данного угла на три равных угла.

Третья задача — задача о квадратуре круга.

Лишь в XIX в., переведя эти задачи на язык уравнений, математики доказали неразрешимость этих задач. В математике это были первые результаты о неразрешимости задач, когда средства решения указаны. Первые две из этих задач приводят к уравнениям третьей степени, а решения задач, строящихся циркулем и линейкой, должны выражаться через квадратные радикалы. Задача же о квадратуре круга вообще не сводится к алгебраическому уравнению.

О возможности построить правильный многоугольник с заданным числом сторон мы уже говорили в п. 15.4.

## 34.5. От греков к Декарту

Дальнейшее развитие геометрии, однако, затормозилось и почти остановилось, так как требовало новых идей и методов. Необходимо было развитие понятия числа, развитие алгебры. Оно и началось в Греции в работах Диофанта (ок. III в.) и далее в Индии, откуда мир получил, не считая других, три великих достижения: позиционную десятичную систему счисления, понятие об отрицательных числах, понятие об иррациональных числах с зачатками алгебры. Дальше развитие алгебры шло особенно быстро в Средней Азии. Собственно, ее основателем можно считать Мухаммеда аль-Хорезми (из Хорезма, 787 — ок. 850 г.). От названия его сочинения произошло само слово «алгебра» (переделанное арабское слово «аль-джебр» — название алгебраической операции перенесения членов уравнения из одной части в другую), а от его прозвища (фамилии) аль-Хорезми образовалось слово «алгоритм» или «алгорифм».

Позже персидский и таджикский поэт и ученый Омар Хайям (ок. 1048 — ок. 1123 г.) дал общее определение числа как отношения любых величин вообще. Это же определение было дано Ньютоном во «Всеобщей арифметике» спустя 600 лет после Хайяма.


Омар Хайям

Западная Европа стала превосходить в развитии математики Среднюю Азию и арабские страны только в XVI в., когда были найдены решения уравнений 3-й и 4-й степеней. В геометрии же принципиально новые шаги были сделаны в XVII в., прежде всего в связи с развитием алгебры, а потом с созданием математического анализа.

Рене Декарт

Знаменитый французский философ и математик Рене Декарт (1596—1650) в известном смысле завершил развитие элементарной алгебры, введя в нее обозначения, принятые и поныне (аль-Хорезми, например, выражал словами то, что теперь пишут формулами). В 1637 г. Декарт опубликовал основное свое сочинение «Геометрия», в котором ввел координаты на плоскости, и, связав таким путем геометрию с алгеброй, включил в предмет геометрии любые кривые, представимые алгебраическими уравнениями.

## 34.6. Анализ и геометрия

Развитие науки в Европе, начавшееся с середины XVI в. системой Коперника, пошло в XVII в. дотоле невиданными темпами. Совершенно преобразуется одна из старейших наук — астрономия, создается механика как наука о движении (у греков была лишь статика), в физике закладывается учение об электричестве и магнетизме и физическая оптика, возникает физиология, начинает складываться как наука химия и т. д.

Получает совершенно новое развитие также и математика: неограниченно расширяется ее предмет и методы. Возникла новая область математики, получившая название «математический анализ», «анализ бесконечно малых» или коротко «анализ». Создание его основ в XVII в. явилось общим делом многих математиков и было завершено решающим вкладом Исаака Ньютона (1643—1727) и Готфрида Лейбница (1646—1716).

Исаак Ньютон

Анализ не только занял в математике центральное положение, но и проник в ее более старые области — в геометрию, в теорию чисел, в алгебру, так что математика стала в подавляющей части анализом и его применениями. Главное же состояло в том, что с момента своего возникновения и тем более в последующем развитии он дал могущественные средства формулировки законов и решения задач точного естествознания и техники.

Если с небольшим преувеличением можно сказать, что у греков математика была геометрией, то также можно сказать, что после Ньютона математика стала анализом.

В геометрии главным стало обеспеченное методом координат приложение алгебры и анализа. Приложение алгебры в геометрии дало аналитическую геометрию. Она была систематически изложена, включая метод координат в пространстве, к середине XVIII в. Леонардом Эйлером (1707—1783). Векторы были введены позже — к середине XIX в.— ирландским математиком Уильямом Гамильтоном (1805—1865).

Начала анализа вы будете изучать в следующих классах, а потому ни о нем, ни о его приложениях в геометрии мы говорить больше не будем.

Однако, несмотря на чрезвычайное влияние анализа, в геометрии, так же как и в алгебре, оставались области и проблемы, ему неподвластные. Именно одна из этих проблем привела в XIX в. к созданию новой, неевклидовой геометрии. Главную роль в создании новой геометрии сыграл Николай Иванович Лобачевский (1792—1856).

Готфрид Лейбниц

Уильям Гамильтон

## 34.7. Геометрия Лобачевского

Среди аксиом Евклида была аксиома о параллельных. От других аксиом она отличалась своей сложностью: в принятой теперь формулировке она говорит о всей бесконечной прямой, не пересекающей данную, а в формулировке самого Евклида была гораздо сложнее остальных. Поэтому возникли попытки вывести ее из остальных предпосылок геометрии. Этим занимались на протяжении 2000 лет многие математики, но все напрасно. Некоторым казалось, что они достигли цели, но потом выяснилось, что они лишь заменяли аксиому Евклида другой равносильной аксиомой.

Пытались доказать аксиому параллельных методом от противного: прийти к противоречию,

Николай Иванович Лобачевский

предполагая противоположное ей утверждение. Но противоречие не получалось.

Наконец, в начале XIX в. одновременно у нескольких математиков возникла мысль, что противоречия и не может получиться, что мыслима геометрия, в которой выполняется аксиома: *на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.*

Янош Бойяи

Первым выступил с этой идеей Н. И. Лобачевский. В 1826 г. он сделал об этом доклад в Казанском университете (где он учился и работал всю жизнь). В 1829—1830 гг. вышла его первая обширная работа, посвященная новой геометрии. В 1832 г. была опубликована работа венгерского математика Я н о ш а  Б о й я и (1802—1860) с теми же, в общем, результатами. Гаусс, придя одновременно к тем же выводам, не решился их опубликовать, опасаясь, как он сам объяснил, быть непонятым и подвергнуться нападкам. Опасения были справедливыми. Лобачевский и Бойяи остались непонятыми почти всеми математиками того времени. Лобачевский подвергался насмешкам, а некоторые считали его чуть ли не сумасшедшим. Однако он имел силу убеждения и мужество развивать новую геометрию и публиковать все более развернутые ее изложения. В последние годы жизни, уже ослепший, он продиктовал еще одну книгу о новой геометрии. Когда же после его смерти она была наконец понята, ее во всем мире стали называть геометрией Лобачевского, а самого Лобачевского даже сравнивали с Коперником, и справедливо, потому что Лобачевский произвел в геометрии величайший переворот. До него веками без тени сомнения было принято всеми, что есть и мыслима только одна геометрия — та, основы которой изложены у Евклида. А Лобачевский опрокинул это всеобщее убеждение: наряду с евклидовой геометрией он построил другую — неевклидову.

## 34.8. Другие геометрии

Итак, до середины позапрошлого века была одна геометрия — евклидова геометрия, та, основы которой изложены в «Началах» Евклида.

Элементы этой геометрии мы изучаем в нашем курсе. Но произошел кардинальный переворот: рядом с евклидовой геометрией возникла еще другая — геометрия Лобачевского. Затем возникли и другие геометрии (отделилась от евклидовой геометрии проективная геометрия, сложилась многомерная евклидова геометрия, а дальше возникла общая теория пространств с произвольным законом измерения длин — риманова геометрия и др.). Из науки о фигурах в одном трехмерном евклидовом пространстве геометрия за какие-нибудь 40—50 лет превратилась в совокупность разнообразных теорий, лишь в чем-то сходных со своей прародительницей — геометрией Евклида.

Об этих и других разделах современной геометрии мы еще расскажем в конце курса геометрии в старших классах.

## 34.9. «Основания геометрии» Д. Гильберта

Исследования в XIX в. по неевклидовой геометрии поставили вопрос и о строгом логическом обосновании самой евклидовой геометрии. К середине XIX в. основания евклидовой геометрии оставались, собственно, на том же уровне, на каком они были в «Началах» Евклида. Для Лобачевского, скажем, не вставал вопрос о том, чтобы указать аксиомы порядка, определяющие расположение точек на прямой: порядок этот считался геометрически очевидным.

Общая тенденция к повышению математической строгости во второй половине XIX в. выразилась в геометрии в стремлении пополнить аксиомы евклидовой геометрии, чтобы по возможности полностью указать все, что на самом деле используется в доказательствах. (Одновременно с работами по основаниям геометрии в это же время ведутся работы по основам анализа, построению аксиоматической теории натуральных и действительных чисел и другие исследования по основаниям математики.)

В конце XIX в. почти одновременно появились несколько работ разных математиков, в которых были предложены различные аксиоматики евклидовой геометрии. Наибольшую известность из них получила книга немецкого математика Давида Гильберта (1862—1943) «Основания геометрии», вышедшая в 1899 г.

Основная заслуга Гильберта, благодаря которой его труд стал классическим, заключается в том, что ему удалось построить аксиоматику геометрии, расчлененную настолько естественным образом, что логическая структура геометрии становится совершенно прозрачной: первые три группы аксиом управляют каждая своим основным отношением — принадлежности, порядка, конгруэнтности (равенства). Это расчленение аксиоматики позволяет, во-первых, формулировать аксиомы наиболее простым и кратким образом и, во-вторых, исследовать, как далеко можно развить геометрию, если класть в основу не всю аксиоматику, а те или иные группы аксиом.

Давид Гильберт

Важно, что работа Гильберта представила аксиоматику геометрии в форме, подчеркнуто отстраненной от наглядных представлений. Так, точки и прямые — это просто некоторые мыслимые «вещи». Их связь выражается аксиомой: «Каждые две точки определяют прямую». Словом, у Гильберта под «точками», «прямыми» и под отношениями «принадлежит», «между», «конгруэнтно» понимаются какие-то «вещи» и отношения между ними, о которых известно только то, что они удовлетворяют аксиомам.

Вслед за «Основаниями геометрии» Гильберта появились работы с другими вариантами аксиоматики евклидовой геометрии: аксиоматика, основанная на понятии движения (наложения), предложенная в 1904 г. Фридрихом Шуром (1856—1932), аксиоматика, предложенная тогда же Вениамином Федоровичем Каганом (1869—1953), основанная на понятии о численном расстоянии, векторная аксиоматика Германа Вейля (1885—1955) и другие аксиоматики.

Вопрос о выработке аксиоматики — возможно, более простой и легче ведущий к основным результатам элементарной геометрии — остается актуальным не только как классический вопрос математики, но и в связи с задачами преподавания. И в различных школьных учебниках геометрии вы найдете ее построения, опирающиеся на разные аксиоматики.

# § 35. Планиметрия Лобачевского

## 35.1. Непротиворечивость аксиоматики и независимость аксиом

Когда какая-либо математическая теория определяется системой аксиом, то возникает вопрос: возможна ли такая теория, нет ли в принятых аксиомах противоречия?

В отношении элементарной геометрии вопрос не вставал, потому что начиная с древнейших времен в геометрии шла речь об изучении свойств окружающего нас пространства. Это пространство и было предметом геометрии. Но когда Лобачевский заменил аксиому параллельных на противоположную, вопрос возник со всей остротой: возможна ли, в самом деле, неевклидова геометрия, а нет ли в ней противоречия?

Смысл геометрии Лобачевского оставался неясным, потому что не было объекта, хотя бы абстрактного, к которому она относилась бы (такой объект был найден позже). Основы геометрии Лобачевского тем самым носили отвлеченный характер, сам он ее назвал «воображаемой».

Для того чтобы отвлеченная аксиоматика получила более определенный смысл, нужно найти объект — модель, где бы она выполнялась, где бы она относилась не к «объектам произвольной природы», а к определенным объектам и отношениям — «определенной природе».

**Модель**, или, как еще говорят, **интерпретация аксиоматики**, представляет собой, коротко говоря, совокупность некоторых конкретных объектов с отношениями, для которых выполняются аксиомы.

Для отвлеченной аксиоматики неизвестно, могут ли выводы из нее привести к противоречию, т. е. к двум таким выводам, в одном из которых что-то утверждается, а в другом оно же отрицается. Такая аксиоматика, заключающая в себе противоречие, заведомо не может реализоваться и не имеет никакого смысла. Если же такие противоречия не могут получиться, аксиоматика называется **непротиворечивой**.

Итак, первое, обязательное условие для любой системы аксиом — это ее непротиворечивость. Вопрос о непротиворечивости аксиоматики решается предъявлением ее модели. Так мы построим модель планиметрии Лобачевского на евклидовой плоскости. Если бы в геометрии Лобачевского оказалось противоречие, то это противоречие в построенной модели привело бы к противоречию в евклидовой геометрии. Тем самым будет доказано, что геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива геометрия Евклида. Непротиворечивость же евклидовой геометрии устанавливается построением ее арифметической модели в рамках теории действительных чисел.

Второй вопрос касается **независимости** аксиом. Аксиома в данной системе называется независимой, если ее нельзя вывести из других аксиом системы. Если такой вывод возможен, то аксиома лишняя, ее можно удалить. Поэтому естественно желание освободиться от таких лишних аксиом и тем обеспечить независимость оставшихся аксиом. Мы уже много говорили о длившихся более 2000 лет попытках вывести аксиому о параллельных из других предпосылок евклидовой геометрии. Наконец, в XIX в. была установлена независимость этой аксиомы. Вслед за этим было установлено общее понятие независимости аксиом и общий принцип доказательства независимости.

Доказательство независимости данной аксиомы $A$ в системе аксиом $S$ достигается указанием модели, в которой выполняются все аксиомы системы $S$, кроме аксиомы $A$, а аксиома $A$ заменяется ее отрицанием, т. е. не выполняется.

Таким образом, построив на евклидовой плоскости модель планиметрии Лобачевского, мы одновременно решим две задачи: докажем непротиворечивость геометрии Лобачевского и докажем независимость аксиомы параллельности Евклида от остальных аксиом евклидовой геометрии.

Непротиворечивость аксиоматики обязательна. Независимость аксиом необязательна, но желательна, чтобы среди них не было лишних.

# 35.2. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Выбор основных понятий

Анри Пуанкаре

Аксиоматика планиметрии Лобачевского отличается от аксиоматики планиметрии Евклида лишь одной аксиомой: аксиома параллельности Евклида заменяется ее отрицанием — **аксиомой параллельности Лобачевского**, $V_Л$. *Найдутся такая прямая а и такая не лежащая на ней точка А, что через А проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие а.*

Как уже говорилось в п. 35.1, непротиворечивость системы аксиом доказывается предъявлением модели, в которой реализуются данные аксиомы. Модель планиметрии Лобачевского на евклидовой плоскости, которую мы предъявим, была построена французским математиком Анри Пуанкаре (1854—1912) в 1882 г.

Построение модели Пуанкаре начнем с того, что придадим конкретный смысл основным объектам и основным отношениям планиметрии Лобачевского.

Фиксируем на евклидовой плоскости $E$ горизонтальную прямую $x$ (рис. 191, *а*). Назовем ее **абсолютом**. Точками плоскости Лобачевского будем считать точки плоскости $E$, лежащие выше абсолюта $x$. Итак, в модели Пуанкаре плоскость Лобачевского — это открытая полуплоскость Л (полуплоскость без граничной прямой), лежащая выше абсолюта.

**Отрезками плоскости Л** считаются дуги окружностей с центрами на абсолюте $x$ или отрезки прямых, перпендикулярных абсолюту (рис. 191, *б*). Отрезки плоскости Л мы будем называть **неевклидовыми отрезками**. Ясно, что

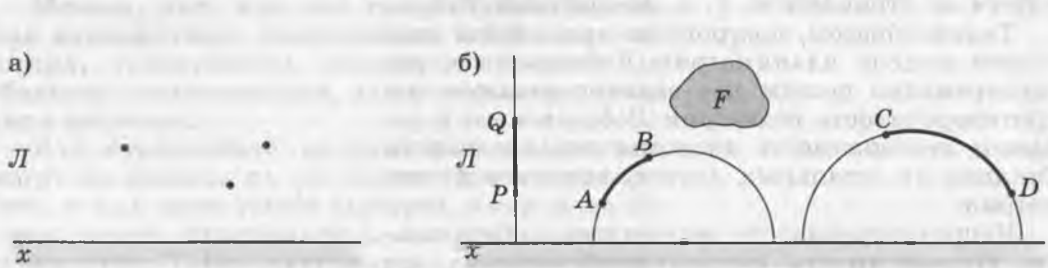



Рис. 191

**концы** неевклидовых отрезков — это концы соответствующих им дуг и отрезков евклидовой плоскости *E*. **Фигура** на плоскости Лобачевского — это фигура открытой полуплоскости Л. **Принадлежность** точки фигуре понимается так же, как на евклидовой плоскости *E*.

Чтобы ввести понятие равенства неевклидовых отрезков в модели Пуанкаре, определим сначала неевклидовы движения в этой модели.

**Неевклидовым движением** назовем преобразование Л, которое является композицией конечного числа инверсий с центрами на абсолюте и осевых симметрий плоскости *E*, оси которых перпендикулярны абсолюту. Инверсии с центром на абсолюте и осевые симметрии плоскости *E*, оси которых перпендикулярны абсолюту, назовем **неевклидовыми осевыми симметриями**.

Два неевклидовых отрезка называются **равными**, если один из них неевклидовым движением можно перевести в другой.

Мы дали реализацию всех основных понятий аксиоматики планиметрии Лобачевского через понятия евклидовой геометрии. Перейдем к проверке аксиом и реализации других понятий, например понятий прямой, угла и т. д. Мы не сможем провести все доказательства в полном объеме, но будут выполнены все необходимые геометрические построения.

## 35.3. Проверка аксиом связи, непрерывности и параллельности

Мы не будем повторять формулировки аксиом, данные в п. 34.3, а будем указывать лишь номер аксиомы. Сразу же отметим, что из группы I очевидна справедливость аксиом I.1, I.3, I.4, I.5. Проверим справедливость I.2 и I.6.

Аксиома I.2. В ней два утверждения: существование отрезка с данными концами *A*, *B* и его единственность. Возможны два случая расположения в Л двух точек *A* и *B*.

а) Прямая (евклидова) *AB* не перпендикулярна абсолюту (рис. 192, *а*). Тогда серединный перпендикуляр *p* отрезка *AB* пересекает абсолют в некоторой точке *O*. Так как $OA = OB$, то дуга окружности *S* с центром *O* и радиусом *OA*, ле-

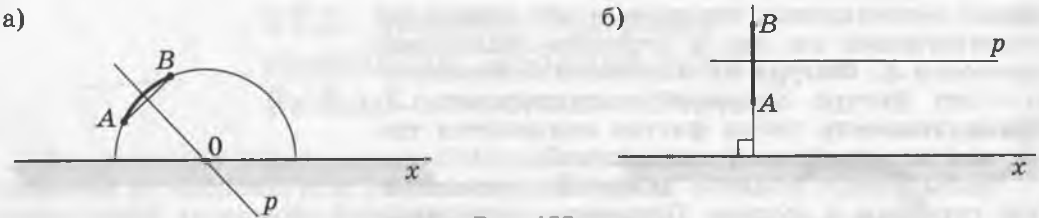



Рис. 192

жащая выше абсолюта, является неевклидовым отрезком $AB$ с концами в точках $A$ и $B$. Этот неевклидов отрезок единственный, так как на абсолюте есть лишь одна точка, равноудаленная от точек $A$ и $B$,— это точка $O$.

б) Прямая (евклидова) $AB$ перпендикулярна абсолюту (рис. 192, *б*). Тогда ее отрезок $AB$ и будет неевклидовым отрезком с концами $A$ и $B$. Снова такой отрезок единственный, так как в этом случае на абсолюте нет точек, равноудаленных от $A$ и $B$ (поскольку $p \parallel x$). ■

А к с и о м а I.6. Если два неевклидовых отрезка имеют две общие точки, то либо они лежат на одной евклидовой окружности (рис. 193, *а*), либо они лежат на одной евклидовой прямой, перпендикулярной абсолюту (рис. 193, *б*).

Действительно, допустив противное, мы получили бы, что две окружности (или прямая и окружность) на евклидовой плоскости пересекаются в четырех точках (двух выше абсолюта и двух, симметричных им, ниже абсолюта; рис. 193, *в*), что невозможно. А две дуги одной окружности, имеющие общие точки, снова будут дугой этой окружности, т. е. неевклидовым отрезком. Аналогичное верно и для отрезков, лежащих на одной прямой, перпендикулярной абсолюту. ■

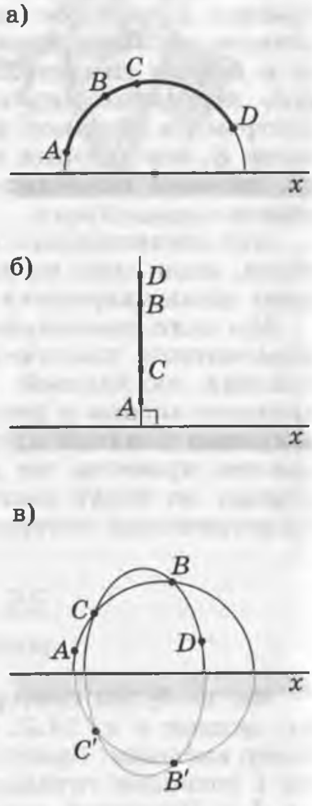



Рис. 193

Проверив аксиомы группы I, мы можем теперь утверждать, что неевклидова прямая $AB$ (объединение всех неевклидовых отрезков, со-


Рис. 194

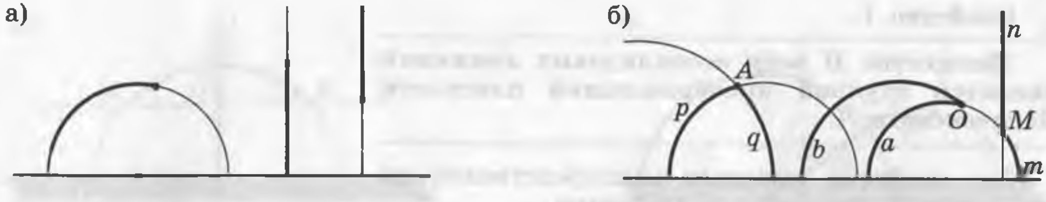



Рис. 195

держащих точки $A$ и $B$) — это полуокружность с концами на абсолюте (рис. 194, *а*) или луч с началом на абсолюте и перпендикулярный абсолюту (рис. 194, *б*).

Какие возможны реализации в модели Пуанкаре для **неевклидовых лучей и неевклидовых углов**, указано на рисунке 195. Дайте самостоятельно словесные формулировки соответствующих утверждений.

Аксиома непрерывности III для неевклидовых отрезков сводится к случаю евклидовых отрезков проектированием на абсолют (рис. 196).

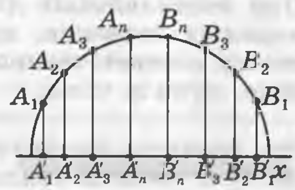



Рис. 196

Утверждение же аксиомы параллельности Лобачевского выполняется не только для некоторой прямой $a$ и некоторой точки $A$, не лежащей на $a$, но и для **любой** неевклидовой прямой $a$ и **любой** не лежащей на ней точки $A$ (рис. 197). Дайте этому подробные объяснения сами.

## 35.4. Свойства неевклидовых движений

Эти свойства играют важную роль при проверке аксиом групп II и IV.

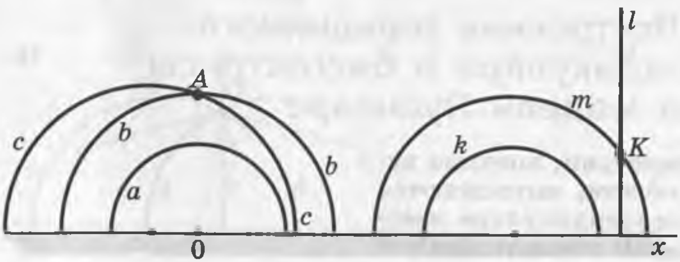



Рис. 197

Свойство 1.

**Множество $H$ всех неевклидовых движений является группой преобразований плоскости Лобачевского Л.**

Это свойство вытекает непосредственно из определения неевклидова движения.

Свойство 2.

**При неевклидовых движениях образами неевклидовых отрезков, прямых, лучей и углов являются соответственно неевклидовы отрезки, прямые, лучи и углы.**

Это свойство вытекает из свойств инверсии (п. 32.4) и свойств евклидовых осевых симметрий.

Отметим, что *неевклидовы углы, преобразующиеся друг в друга неевклидовым движением, равны в смысле определения равенства углов* в п. 33.3. Отметим также, что *их величины* (в евклидовом смысле) *равны*, так как и инверсии, и евклидовы осевые симметрии сохраняют углы.

Свойство 3.

**Если неевклидово движение переводит неевклидов луч в себя, то либо это тождественное преобразование, либо это неевклидова осевая симметрия относительно неевклидовой прямой, содержащей данный луч. В обоих случаях все точки этой прямой для данного преобразования неподвижны.**

Это свойство мы не доказываем.

## 35.5. Построение серединного перпендикуляра и биссектрисы угла в модели Пуанкаре

Неевклидовы осевые симметрии, которые используются при проверке аксиом, выполняются относительно серединного перпендикуляра неевклидова отрезка и биссектрисы неевклидова угла. Поэтому покажем, как они строятся.

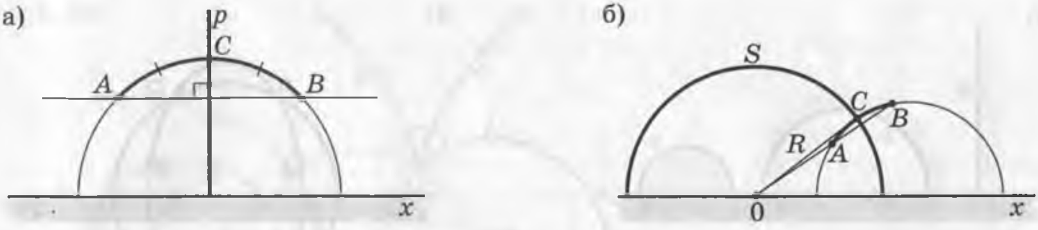



Рис. 198

**Задача 1.** *Пусть дан неевклидов отрезок AB. Построить его серединный перпендикуляр.*

**Решение.** Возможны два случая.

а) Евклидова прямая $AB$ параллельна абсолюту $x$ (рис. 198, *а*). Тогда евклидов серединный перпендикуляр евклидова отрезка $AB$ является серединным перпендикуляром и неевклидова отрезка $AB$.

б) Евклидова прямая $AB$ пересекает абсолют в точке $O$ (рис. 198, *б*). Найдем отрезок $R$, такой, что $OA \cdot OB = R^2$. Построим евклидову окружность $S$ с центром $O$ и радиусом $R$. Как неевклидова прямая, она и будет серединным перпендикуляром неевклидова отрезка $AB$.

Действительно, пусть $C$ — точка пересечения $S$ и неевклидова отрезка $AB$, а $f$ — инверсия относительно $S$. Так как $f(A) = B$, $f(B) = A$ и $f(C) = C$, то $C$ — середина неевклидова отрезка $AB$. Кроме того, смежные неевклидовы углы в точке $C$ равны, так как переводятся друг в друга инверсией $f$. Поэтому они прямые. ■

**Задача 2.** *Построить биссектрису неевклидова угла.*

**Решение.** Пусть дан неевклидов угол $ab$ с вершиной $O$. Проведем евклидовы касательные лучи $p$ и $q$ в точке $O$ к сторонам угла $ab$ (рис. 199, *а*) и биссектрису $r$ евклидова угла $pq$. Если


Рис. 199

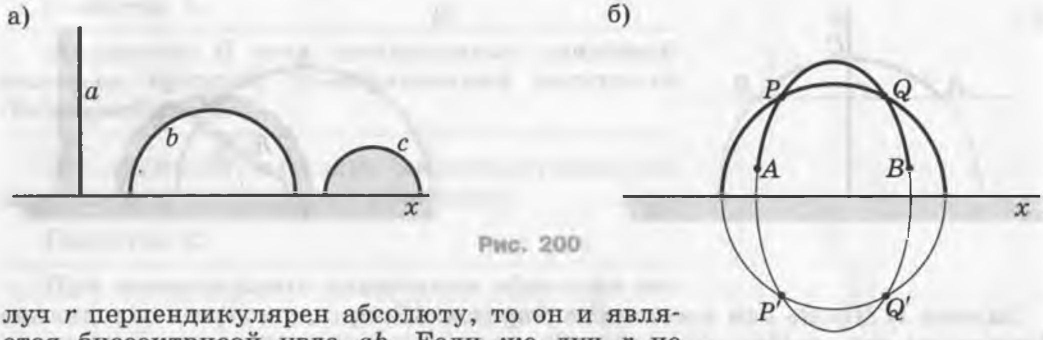



Рис. 200

луч $r$ перпендикулярен абсолюту, то он и является биссектрисой угла $ab$. Если же луч $r$ не перпендикулярен абсолюту, то проведем из точки $O$ неевклидов луч $c$, касающийся луча $r$ (рис. 199, *б*). Он и будет биссектрисой угла $ab$. (Где лежит центр окружности, соответствующей лучу $c$?) ■

## 35.6. О проверке аксиом равенства отрезков и аксиом плоскости

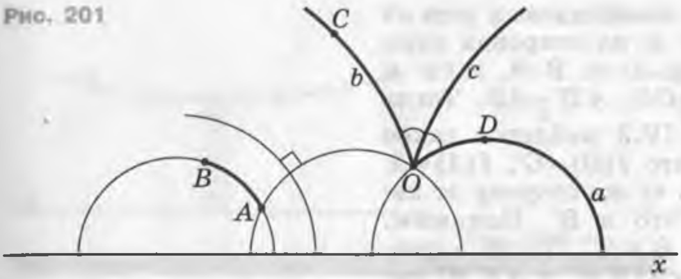
Если аксиомы групп I, III и $V_Л$ допускают в рамках школьного курса детальную проверку, то проверить некоторые аксиомы групп II и IV в этом курсе столь же точно нельзя. Поэтому для некоторых из аксиом мы укажем лишь план соответствующего доказательства.

Прежде всего отметим, что в модели Пуанкаре выполняется аксиома IV.1, не связанная с понятием равенства отрезков. **Неевклидовы полуплоскости** изображены на рисунке 200, *а*. Неевклидов отрезок, соединяющий две внутренние точки неевклидовой полуплоскости, не пересекает ее границы. Действительно, предположив противное, мы снова пришли бы к тому, что евклидовы окружности пересеклись бы в четырех точках (рис. 200, *б*), что невозможно.

Аксиома II.1. Вытекает из свойства 1 неевклидовых движений.

Проверим справедливость аксиомы II.2. Пусть даны неевклидов отрезок $AB$ и неевклидов луч $a$ с началом $O$ (рис. 201). Неевклидовой осевой симметрией $f$ относительно серединного перпендикуляра неевклидова отрезка $AO$ переведем точку $A$ в точку $O$, а точку $B$ в точку $C = f(B)$. Пусть $b$ — неевклидов луч, идущий из

Рис. 201




точки $O$ через точку $C$, а $c$ — биссектриса угла $ab$. Тогда неевклидова симметрия $g$ относительно луча $c$ переводит точку $C$ в точку $D=f(C)\in a$. Неевклидово движение $\varphi=g\circ f$ переводит неевклидов отрезок $AB$ в неевклидов отрезок $OD$, лежащий на луче $a$ и равный неевклидову отрезку $AB$, т. е. $OD \underset{\text{л}}{=} AB$. (Будем символом $\underset{\text{л}}{=}$ обозначать равенство фигур на плоскости Лобачевского Л.) Итак, установлена возможность «отложить» на луче $a$ отрезок $OD \underset{\text{л}}{=} AB$. Докажем единственность такого отрезка $OD$, т. е. единственность точки $D$.

Допустим, что на луче $a$ нашлась еще такая точка $D_1$, что $OD_1=AB$. Тогда найдется такое неевклидово движение $h$, что $h(O)=A$ и $h(D_1)=B$. Преобразование $\varphi\circ h$ переводит луч $a$ в тот же луч. При этом $\varphi\circ h(D_1)=\varphi(B)=D$. По свойству 3 из п. 35.4 все точки луча $a$ неподвижны при преобразовании $\varphi\circ h$, в том числе и точка $D_1$. Поэтому $\varphi\circ h(D_1)=D_1$, т. е. $D_1=D$. ■

Проверка аксиом II.3 и IV.2 проводится аналогичными рассуждениями. Проведите их самостоятельно. Справедливость аксиомы II.4 (Архимеда) в модели Пуанкаре здесь мы проверить не сможем.

Чтобы проверить аксиому IV.3 (она аналогична третьему признаку равенства треугольников), следует предварительно доказать (в модели Пуанкаре) два утверждения: 1) *биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является его медианой и высотой;* 2) *через каждую точку прямой можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной.* Первое из них доказывается применением симметрии относительно биссектрисы, а второе следует из свойства 3 п. 35.4 и аксиомы IV.2.

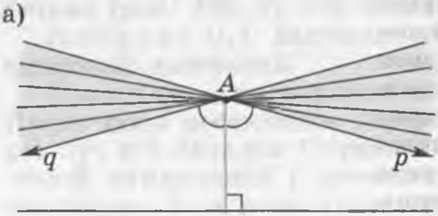
Пусть теперь заданы два неевклидовых угла $ab$ и $a'b'$ с вершинами $O$ и $O'$ и на сторонах этих углов нашлись такие точки $A \in a$, $B \in b$, $A' \in a'$ и $B' \in b'$, что $O'A' \underset{л}{=} OA$, $O'B' \underset{л}{=} OB$, $A'B' \underset{л}{=} AB$. Тогда согласно аксиомам II.2 и IV.2 найдется такое неевклидово движение $f$, что $f(O) = O'$, $f(A) = A'$ и точка $B'' = f(B)$ лежит по ту же сторону от неевклидовой прямой $O'A'$, что и $B'$. Покажем, что $B'' = B'$. Допустим, что $B' \neq B''$. Тогда в равнобедренных треугольниках $O'B'B''$ и $A'B'B''$ медианы $O'C$ и $A'C$ перпендикулярны прямой $B'B''$, что невозможно. Итак, $B'' = B'$, т. е. $\angle a'b' = \angle ab$. ■

Тем самым мы в основном завершили построение модели Пуанкаре планиметрии Лобачевского и, таким образом, доказали непротиворечивость геометрии Лобачевского. Этим же мы доказали независимость аксиомы параллельности от остальных аксиом групп I—IV.

## 35.7. Взаимное расположение прямых на плоскости Лобачевского

Используя модель Пуанкаре, дадим обзор важнейших свойств плоскости Лобачевского. Начнем с классификации расположения прямых на Л′.

На плоскости Лобачевского Л′ через каждую точку $A$, не лежащую на прямой $a$, проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих прямую $a$ (рис. 202, $a$). Все эти прямые заполнят два вертикальных угла, ограниченных прямыми $p$ и $q$. Граничные прямые $p$ и $q$, не пересекающие прямую $a$, называются на плоскости Лобачевского **параллельными прямой $a$** и проходящими через точку $A$. Каждому направ-



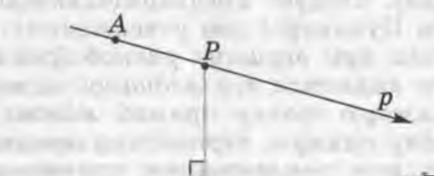




Рис. 202

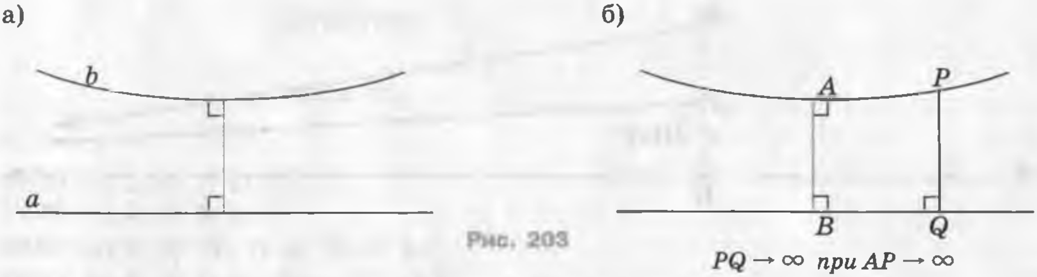



Рис. 203

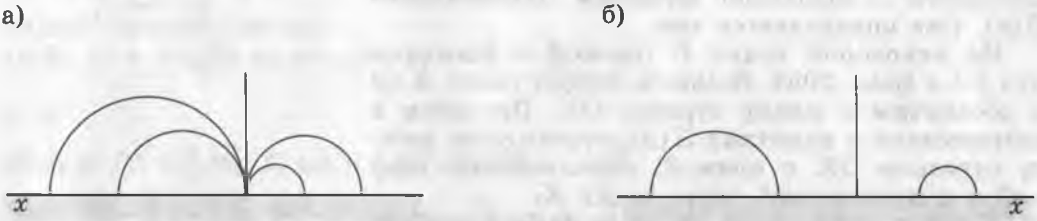



Рис. 204

лению на прямой $a$ соответствует своя параллельная прямая, проходящая через $A$.

Характерное свойство параллельных прямых на плоскости Лобачевского: *параллельные прямые на плоскости Лобачевского неограниченно сближаются в направлении параллельности и неограниченно расходятся в противоположном направлении* (рис. 202, *б*).

Те прямые на плоскости Лобачевского, которые и не пересекаются, и не параллельны, называются **расходящимися**. *Характерное свойство расходящихся прямых — наличие у них единственного общего перпендикуляра* (рис. 203, *а*). Расходящиеся прямые неограниченно расходятся в обоих направлениях (рис. 203, *б*).

В модели Пуанкаре параллельные прямые изображаются полуокружностями и лучами, касающимися на абсолюте (рис. 204, *а*). Изображения же расходящихся прямых не имеют общих точек ни в Л, ни на абсолюте (рис. 204, *б*).

## 35.8. Углы и площади на плоскости Лобачевского

На плоскости Лобачевского углы и длины связаны не такими зависимостями, как на плоскости Евклида. Одно из характерных свойств

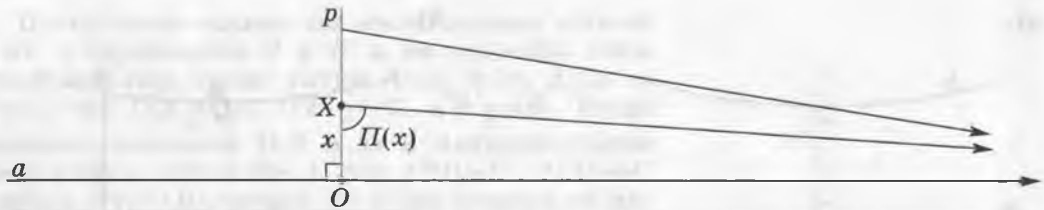



Рис. 205

плоскости Л выражает **функция Лобачевского** $\Pi(x)$. Она определяется так.

Из некоторой точки $O$ прямой $a$ проведем луч $p \perp a$ (рис. 205). Возьмем любую точку $X \in p$ и обозначим $x$ длину отрезка $OX$. Поставим в соответствие $x$ величину $\Pi(x)$ острого угла между отрезком $OX$ и прямой, параллельной прямой $a$ и проходящей через точку $X$.

*Когда $x$ возрастает от нуля до бесконечности, функция $\Pi(x)$ непрерывно убывает от 90° до 0°.*

Существование таких зависимостей между длинами отрезков и углами означает, что *на плоскости Лобачевского нет подобных фигур*. Например, на плоскости Лобачевского справедлив такой признак равенства треугольников: *если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

*Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше 180°*. Разность между 180° и суммой углов треугольника называется **избытком треугольника**. Оказывается, что *на плоскости Лобачевского площадь треугольника пропорциональна его избытку*. Следовательно, *на плоскости Лобачевского площади треугольников ограничены некоторой постоянной.*

Величины углов на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре равны величинам соответствующих углов на евклидовой плоскости. Поэтому все перечисленные в этом пункте свойства углов плоскости Л вы можете увидеть на модели Пуанкаре.

# Ответы

## Глава IV

### § 19

19.19. а) 1; б) 1; в) $\sqrt{3}$.
19.20. а) 2; б) 2; в) 0.
19.21. а) 0; б) $\sqrt{2}-1$; в) $\sqrt{3}$; г) 2.
19.22. а) 1; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}$; д) 1.
19.30. $\sqrt{13+6\sqrt{2}}$ 100 км.
19.31. а) $v_1=v_2$; б) $\operatorname{tg}\varphi=v_2/v_1$; в) $v=\sqrt{v_1^2-v_2^2}$.

### § 20

20.8. а) $\overrightarrow{PX}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{QX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{XP}$; в) $\overrightarrow{PQ}=-3\overrightarrow{QX}$.

20.9. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

### § 21

21.6. б) $\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\alpha$, $\alpha$.
21.7. В одном из случаев $\varphi_1+\varphi_2$.
21.8. $\frac{\varphi}{2}$, $\frac{\pi+\varphi}{2}$ и $\frac{\pi-\varphi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$.
21.9. а) $0°$; б) $0°<\angle\vec{e}_1\vec{e}_2<120°$; в) $60°$; г) $0°<\angle\vec{e}_1\vec{e}_2<60°$.
21.10. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{5}$, $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$, $\vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b}$.
21.11. а) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; б) $\cos\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.
21.12. $150°$.
21.14. а) (1, 0); б) (–3, –1); в) (–4, –3); г) (–6, –4).
21.16. а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
21.18. а) –0,5; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) –0,25; д) 0,75; е) 0.
21.19. а) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$; б) –1,1, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\pm\sqrt{3}$; в) $-\cos 2\varphi$, $\cos\varphi$, $-\cos\varphi$, $2\cos^2\varphi$; г) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{8}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{9}{2}$.
21.21. а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{2}$; в) $0{,}5\sqrt{3}-\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{2}-0{,}5\sqrt{3}$; д) $0{,}25(\sqrt{3}+12\sqrt{2})$; е) $-\sqrt{3}-0{,}25\sqrt{2}$.
21.22. а) 1; б) 1; в) –1; г) –1; д) 2; е) –0,5.

### § 22

22.7. а) $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$, $(-2, 0)$; б) $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$, $(-2, 0)$; в) $(2, 0)$, $(-1, -\sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$; г) $(-\sqrt{3}, 1)$, $(\sqrt{3}, 1)$, $(0, -2)$; д) $(3\sqrt{2}, 0)$, $(-1{,}5\sqrt{2}, -1{,}5\sqrt{2})$, $(-1{,}5\sqrt{2}, 1{,}5\sqrt{2})$; е) $(3, 3)$, $(0, -3)$, $(-3, 0)$.

22.18. а) $(0{,}5\sqrt{2},\ 0{,}5\sqrt{2}), (-0{,}5\sqrt{2},\ 0{,}5\sqrt{2})$; б) $(0{,}5\sqrt{2},\ -0{,}5\sqrt{2}), (0{,}5\sqrt{2},\ 0{,}5\sqrt{2})$.

22.19. а) $2\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{10}$; в) $\sqrt{13}$; г) $\sqrt{17}$; д) $\frac{\sqrt{229}}{6}$.

22.20. д) $(-2,\ 3)$, $\sqrt{13}$; е) $(0{,}5,\ -1{,}5)$, $\sqrt{2{,}5}$.

22.23. в) $(\pm 0{,}5\sqrt{2},\ \mp 0{,}5\sqrt{2})$.

22.24. $\vec{a} = -\vec{b} + 0{,}75\vec{c}$; $\vec{b} = -\vec{a} + 0{,}25\vec{c}$; $\vec{c} = 4\vec{a} + 4\vec{b}$.

22.30. а) $0{,}5\vec{b} - \vec{a}$; б) $0{,}5\vec{a} - \vec{b}$; в) $0{,}5\vec{a}$; г) $0{,}5\vec{b} - \vec{a}$.

22.32. в) $(-2p,\ -2q)$.

22.33. в) $\sqrt{31^2 + 26^2}$.

22.34. $(-1,\ 1)$.

22.35. а) $(2,\ 0)$; б) $(11,\ -9)$; в) $(3,\ -1)$; г) $(-5,\ 7)$.

22.36. б) Один из ответов $(\cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi)$.

22.37. а) $\sqrt{13}$, $\sqrt{26}$; б) прямоугольный.

22.38. а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{5}$; в) $4\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}$; е) 10.

## § 23

23.3. б) $-3\sqrt{2}$.

23.4. а), г), д) 1; б), е) $-1$; в), ж), и) 0; з) $1{,}25 \sin 2\varphi$, где $\operatorname{tg} \varphi = 0{,}5$.

23.5. а), в), г) 2; б) $-2$; д), ж) 0; е) $-1{,}5$.

23.6. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) 0.

23.7. а) $-1$; б), в) 0; г) 1.

23.9. а) 8; б) $-12$; в) $-\frac{2}{3}$; г) 17; д) 26; е) 10; ж) $-8$.

23.10. а) 27; б) 14; в) $-19$; г) 23.

23.11. $\frac{-5}{\sqrt{10}}$.

23.12. а) $\frac{17\sqrt{30} \pm \sqrt{10}}{40}$, $\frac{3\sqrt{30} \pm \sqrt{10}}{20}$; б) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$; в) $\frac{9}{5}$, $\frac{8}{5}$.

23.14. а) $-0{,}5$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; в) $1 - \sqrt{3}$; г) $4 + 2\sqrt{3}$.

23.15. В одном из случаев $\vec{x} = \vec{0}$.

23.16. б) $\overrightarrow{AO} = \dfrac{\overrightarrow{AC}^2}{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\overrightarrow{AB}^2}{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2}\overrightarrow{AC}$.

## § 24

24.3. а) $2a^2$; $1{,}25a^2$; $a^2$; б) $a^2$.

24.7. $3:2$.

24.8. а) $1:1$; б) $2:3$.

24.9. $1:1:1$.

24.10. $\overrightarrow{T_1T_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2})$.

24.11. а) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + 3\overrightarrow{OA_2})$.

24.13. $n(d^2 + R^2)$.

24.47. $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant 1{,}5$.

24.52. $\overrightarrow{KL}=\frac{p}{p+q}\overrightarrow{AC}+\frac{q}{p+q}\overrightarrow{BD}$.

24.59. а) $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$; в) $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{AB}\neq\lambda\overrightarrow{BC}$; ж) $\overrightarrow{OC}=0{,}5(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

24.60. а) $\overrightarrow{AB}^2=0$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$; в) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$ для тупого угла;
г) $|\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}|=|\overrightarrow{XA}|\cdot|\overrightarrow{XB}|$.

## § 25

25.3. а) $y=\sqrt{3}x-1$, $y=-\sqrt{3}x+1$, $y=0$; б) $y=\pm x\pm 1$; в) $y=x+3$, $y=-x+1$, $y=x+1$, $y=-x-1$; г) $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $y=\pm 6x+12$, $y=3$, $y=0$; е) $y=\pm\sqrt{3}x+1$, $y=-\frac{1}{2}$.

25.11. г) $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\frac{1}{2}$; д) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $0{,}5\sqrt{2}$.

25.14. а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) $\sqrt{2{,}5}$; в) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{130}}{9}$.

25.15. а) $4R^2$; б) $2(3r^2-a^2)$.

25.16. б2) $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

25.17. а) $(1;\ -1)$; б) $\left(\frac{3+2\sqrt{51}}{13};\ \frac{2-3\sqrt{51}}{13}\right)$ и $\left(\frac{3-2\sqrt{51}}{13};\ \frac{2+3\sqrt{51}}{13}\right)$.

25.18. От $2r^2$ до $4r^2$.

25.19. в) От 0 до $R^2$.

25.20. 4.

25.22. д) $(x+5)^2+(y-4)^2=16$; е) $(x+2)^2+(y-2)^2=4$; ж) $(x-2)^2+y^2=2$.

25.23. б) $(x+2)^2+(y\pm\sqrt{91})^2=100$; в) $(x+1{,}25)^2+(y-0{,}25)^2=\frac{17}{8}$;
г) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$, $(x-5)^2+(y-2)^2=5$; д) $(x-5)^2+(y-5)^2=25$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

25.24. а1) $y+1=\frac{(x+2)}{3}$, а2) $y+1=-2(x-2)$, а3) $y=-1$.

25.25. з) $y=\operatorname{tg}\varphi(x+2)-3$.

25.26. г) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

25.27. а) $y=-1$; б) $x=3$; в) $y=x-4$; г) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)-1$; д) $y=x-4$;
е) $y=-x+2$.

25.29. а) $y=x+1$; б) $y=x-1$; в) $y=x-\sqrt{2}$.

25.30. г) $y=3x-7$.

25.31. в) $(x-3)^2+(y+2)^2=36$.

25.32. По эллипсу.

25.33. По гиперболе.

25.42. а) $y=0{,}25x^2+1$; б) $y=-0{,}25x^2-1$; в) $x=0{,}25y^2+1$;
г) $x=-0{,}25y^2-1$.

25.43. а) Луч $x=y$; б) луч $x=2y$; в) луч $x=\sqrt{3}y$; г) луч $y=\sqrt{3}x$;
д) точка $(1;\ 1)$.

25.44. а) $x^2+(y-1)^2=1$; б) $(x-1)^2+y^2=1$; в) $x^2+y^2=2$.

25.45. а), б) По окружности.

25.46. По дуге эллипса.
25.47. а) По отрезку; б) по дуге гиперболы.

## Задачи к главе IV

IV.3. а) $-1{,}5$.
IV.6. а1) $3x+4y+2=0$, а2) $x+7y-5=0$, а3) $4x-3y+5=0$; б1) 5, б2) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, б3) $\frac{17}{15}$.
IV.7. а) $(x-0{,}5)^2+(y\pm\sqrt{2})^2=2{,}25$; б) $(x-5)^2+(y-5)^2=25$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; г) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.
IV.12. а) Ветка гиперболы; б) ветки гиперболы; в) часть прямой или гиперболы.
IV.13. б), в), г) Окружность (при некоторых ограничениях).
IV.14. а) Пара прямых.
IV.16. а) Окружность; б), в) прямая.

## Глава V

### § 27

27.26. а) Периметры — 9 и 3, площади — $1{,}75\sqrt{3}$ и $0{,}25\sqrt{3}$; б) периметры — 10 и 2, площадь одной из фигур $\left(\frac{17}{9}\right)\sqrt{3}$.
27.27. а) $(-3{,}5)$; б) $(-2, -2)$; в) $x_1=0$, в2) $y=-3$, в3) $y_1=x_1+1$, в4) $y_1+2x_1+2=0$, в5) $(x_1+2)^2+(y_1+1)^2=1$.
27.28. б) Периметр — 9, площадь — $1{,}75\sqrt{3}$.
27.29. Периметры — $16\pi$ и $8\pi$, площадь пересечения — $12\pi-9\sqrt{3}$.
27.30. Периметр — $\frac{2(b^2-a^2+2ab)}{b}$, площадь — $\frac{a(2b^2-a^2)}{b}$.
27.31. Площади: в) $S(2-\operatorname{tg}22°30')$; г) $S\left(2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; д) $S\sqrt{2}$.
27.32. Площади: а) $S(5-2\sqrt{3})$; б) $0{,}5S(7-2\sqrt{3})$.
27.33. Площадь — $2(2+\sqrt{2})$.
27.34. $\frac{4\left(\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}{\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}$.
27.35. а) Периметры — 4 и 2, площади — $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\frac{\sqrt{3}}{8}$; б) периметры — 4 и 2, площади — $\frac{3\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
27.36. Периметры — $\frac{20\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{3}$, площади — $8\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$, $\frac{64\pi}{3}+8\sqrt{3}$.
27.38. а) $(-1, 1)$; б) $y_1=-2$; в) $y_1=-0{,}5x_1$; г) $y_1=x_1+1$; д) $(x_1-1)^2+(y_1-1)^2=1$.
27.39. а) $(\cos\varphi+\sin\varphi, \sin\varphi-\cos\varphi)$; б) $y_1=-(\operatorname{tg}\varphi)x_1+\frac{3}{\cos\varphi}$.
27.56. а), б) По отрезку прямой.

§ 31

31.16. а) $\frac{ac}{b}$; б) $ab/(a+b)$; в) $\frac{a(b+c)}{b}$.

31.17. а) $\frac{S}{3}$; б) $\frac{S}{2}$; в) $\frac{S}{4}$; г) $\frac{2S}{3}$; е) $\frac{S}{3}$; ж) $\frac{S}{3}$.

31.68. д) $\frac{(d_2-d_1)}{2}$ (если $d_2$ — большее основание).

31.89. 1,2 км.

31.90. 4 см$^2$.

## Задачи к главе V

V.1. а) $X=\frac{\pi S\sqrt{3}}{6}$; б) $Y=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)$; в) $Y=\frac{S(2\pi-3\sqrt{3})}{27\sqrt{3}}$;

г) $X=\frac{S(4\pi-6\sqrt{3})}{9\sqrt{3}}$.

V.2. а) $X:S=(0{,}5\pi-1)$; б) $X:S=\left(\frac{\pi}{8}\right)-0{,}25$; в), г) $\frac{1}{4}$.

V.3. б) $\frac{X}{S}=\frac{1}{2\pi}$; в) $\frac{Y}{S}=\frac{1}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)$.

V.4. а) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$; б) при условии, что все окружности равны $\frac{4\pi}{27\sqrt{3}}$;

в) $\frac{5\pi}{4(3+2\sqrt{2})}$; г) радиусы окружностей — $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ и

$\frac{4\sqrt{3}-3-2\sqrt{6(2-\sqrt{3})}}{3}$.

V.6. 1 : 30.

V.7. 1 : 10.

V.8. При условии, что данный треугольник равносторонний; площадь наименьшего (по площади) из полученных треугольников — $0{,}5\sqrt{1{,}5}\cos 15°\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{\cos 15°}\right)^2$.

# Оглавление

Введение . . . . . . 3

Глава IV
ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ . . . . . . 4

§ 18. Векторы . . . . . . —
§ 19. Сложение векторов . . . . . . 12
§ 20. Умножение вектора на число . . . . . . 25
§ 21. Проекция вектора на ось . . . . . . 30
§ 22. Координаты вектора . . . . . . 39
§ 23. Скалярное умножение . . . . . . 50
§ 24. Векторный метод . . . . . . 56
§ 25. Метод координат . . . . . . 74
Задачи к главе IV . . . . . . 91
Дополнение к главе IV
Векторы и координаты в пространстве . . . . . . 93

Глава V
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ . . . . . . 97

§ 26. Движения и равенство фигур . . . . . . —
§ 27. Виды движений . . . . . . 108
§ 28. Классификация движений . . . . . . 126
§ 29. Симметрия фигур . . . . . . 137
§ 30. Равновеликость и равносоставленность . . . . . . 154
§ 31. Подобие . . . . . . 160
§ 32. Инверсия . . . . . . 186
Задачи к главе V . . . . . . 195
Дополнение к главе V
Движения и подобия в пространстве . . . . . . 199

Глава VI
ОСНОВАНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ . . . . . . 203

§ 33. Аксиоматический метод и основания планиметрии Евклида . . —
§ 34. История развития геометрии . . . . . . 211
§ 35. Планиметрия Лобачевского . . . . . . 222
Ответы . . . . . . 235

Учебное издание

**Александров** Александр Данилович
**Вернер** Алексей Леонидович
**Рыжик** Валерий Идельевич

# ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 9 класса
с углубленным изучением математики

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова
Редактор Т. Ю. Акимова
Младший редактор Н. В. Ноговицина
Художник А. С. Побезинский
Художественный редактор О. П. Богомолова
Компьютерная графика В. В. Брагина
Технический редактор Л. В. Марухно
Корректор О. Н. Леонова

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Сдано в набор 18.02.03. Подписано в печать 09.12.03. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,55+0,43 форз. Усл. кр.-отт. 36,99. Уч.-изд. л. 13,31+0,56 форз. Тираж 10 000 экз. Заказ № 2589.

Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени «Издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.